SENTRALITAS KEANTARAAN DALAM GRAF

MAKALAH

Oleh:
Masrurotullaily
NIP. 199101302019032008

INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI JEMBER
LEMBAGA PENJAMINAN MUTU
FEBRUARI, 2021

SENTRALITAS KEANTARAAN DALAM GRAF

MAKALAH

Diajukan kepada Lembaga Penjaminan Mutu IAIN Jember untuk dipresentasikan dalam seminar diskusi periodik dosen

IAIN JEMBER

Oleh:
Masrurotullaily
NIP. 199101302019032008

INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI JEMBER
LEMBAGA PENJAMINAN MUTU
FEBRUARI, 2021

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

BAB I
PENDAHULUAN

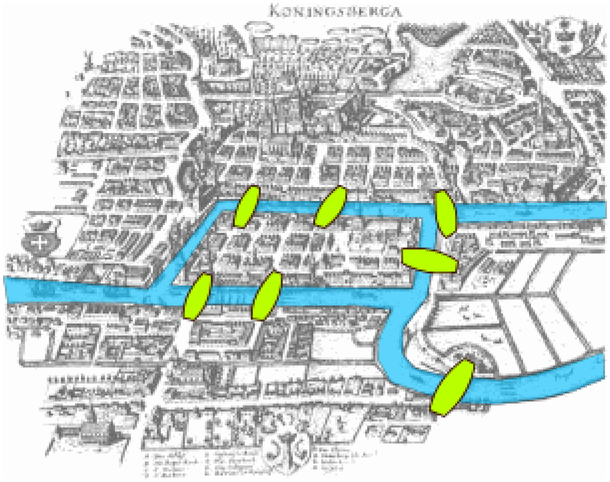
A. Latar Belakang

Teori graf (*Graph Theory*) merupakan salah satu cabang ilmu matematika murni yang bermain-main dengan graf. Perlu ditekankan di sini bahwa graf yang dimaksud bukanlah grafik suatu persamaan yang digambarkan dalam sistem koordinat Kartesius seperti yang sering dibahas dalam studi aljabar, kalkulus, maupun geometri.[1] Sederhananya, graf di sini secara visual merupakan titik-titik yang dihubungkan oleh garis-garis.

Digunakannya graf ini berawal dari permasalahan jembatan Königsberg yang berada di negara Rusia pada tahun 1736. Terdapat sebanyak tujuh buah jembatan penghubung beberapa daratan yang dipisahkan oleh sungai Pregal seperti yang terlihat pada gambar berikut:

Gambar 1.

Jembatan Königsberg [2]



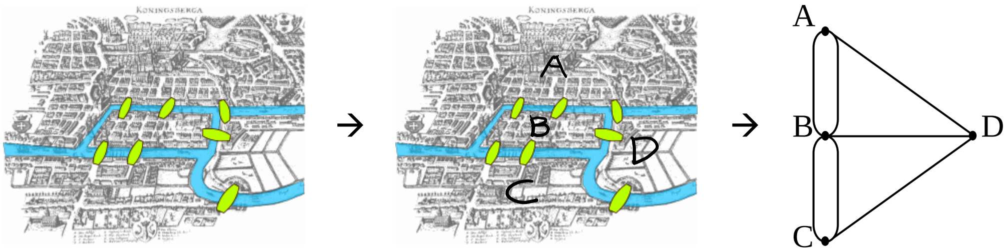
Permasalahannya adalah adakah kemungkinan melalui semua jembatan pada Gambar 1 tepat satu kali dan berakhir di tempat semula? Leonhard Euler yang merupakan matematikawan Swiss memodelkan permasalahan ini ke dalam sebuah graf. Titik-titik dalam graf merepresentasikan daratan yang dipisahkan

[1] R.J. Trudeau, *Introduction to Graph Theory* (North Chelmsford: Courier Cooperation, 2013), 9.
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png

oleh sungai Pregal sedangkan sisi-sisinya adalah jembatan yang menghubungkan daratan tersebut. Graf yang merepresentasikan permasalahan jembatan Königsberg dapat dilihat pada Gambar 2.[3]

Gambar 2.

Graf yang merepresentasikan Jembatan Königsberg



Berdasarkan graf pada Gambar 2, Euler mengungkapkan bahwa tidak ada kemungkinan kembali ke tempat semula setelah melalui semua jembatan tepat 1 kali. Hal ini dikarenakan setiap titiknya berderajat ganjil. Derajat suatu titik di sini adalah jumlah sisi-sisi yang bersisian dengan titik yang diamati.[4]

Berawal dari permasalahan di atas, teori graf mulai sering digunakan dalam berbagai bidang misalnya pada kimia, permainan, transportasi dan lain sebagainya. Hal ini disebabkan teori graf mempermudah dalam menganalisis permasalahan yang terlihat kompleks. Analisis jaringan sosial atau *Social Network Analysis* (SNA) juga merupakan salah satu aplikasi teori graf. Seperti pada permasalahan jembatan Königsberg, graf dalam SNA merepresentasikan jaringan sosial yang sedang dianalisis dan salah satu permasalahan yang akan dibahas dalam makalah ini adalah mencari sentralitas keantaraan (*Betweenness Centrality*).

Dalam graf, mencari sentralitas sendiri sama halnya dengan mencari titik yang berperan penting sebagai titik pusat. Jika yang dicari sentralitas keantaraannya maka titik pusat yang dimaksud adalah titik yang sering dilalui

---

[3] Farida Daniel & Prida N.L. Taneo, *Teori Graf* (Yogyakarta: Deepublish, 2019), 1.
[4] Ibid, 2.

dalam lintasan terpendek antara satu titik ke titik lainnya.[5] Jika dikaitkan dalam jaringan sosial maka titik pusat ini beperan sebagai perantara. Misalnya dalam kehidupan sehari-hari, contoh yang bisa diambil adalah jual-beli sayur-sayuran. Sering dijumpai pedagang sayur berkeliling menggunakan gerobak atau sepeda motor menjual berbagai macam sayuran yang sebelumnya dibeli dari pasar. Para ibu rumah tangga bisa saja membeli langsung ke pasar. Namun, dengan membeli ke pedagang sayur keliling, para ibu bisa menghemat waktu untuk mendapatkan sayuran dengan harga dan kualitas yang kurang lebih sama daripada membeli langsung ke pasar. Hal ini menjadikan pedagang sayur keliling sangat penting dalam jaringan perdagangan sayur-sayuran. Namun, apakah benar pedagang sayur memegang peran penting tersebut dalam jaringan? Permasalahan ini bisa dianalisis menggunakan SNA yang merupakan aplikasi teori graf dengan mencari nilai sentralitas keantaraannya.

B. Permasalahan

Berdasarkan latar belakang yang dijelaskan sebelumnya, permasalahan yang dibahas dalam makalah ini adalah bagaimana menentukan pusat jaringan yang direpresentasikan sebagai sebuah graf sederhana berbobot berdasarkan sentralitas keantaraannya. Graf sederhana sendiri merupakan graf yang tidak mengandung gelang (*loop*) maupun sisi ganda (*multiple edges*).[6] Adapun graf sederhana yang digunakan dalam makalah ini adalah graf sederhana tak berarah yang berbobot.

C. Tujuan

Tujuan dipilihnya topik permasalahan dalam makalah ini adalah untuk memberikan informasi atau pengetahuan terkait salah satu aplikasi teori graf yaitu analisis jaringan sosial yang salah satunya mencari pusat jaringan berdasarkan sentralitas keantaraannya. Selain itu, dengan ditulisnya makalah ini, diharapkan dapat memberikan wawasan bagi pembaca tentang bagaimana cara

---

[5] Matthias Dehmer & Subhash C. Basak, *Statistical and Machine Learning Approaches for Network Analysis* (Amerika: John Wiley & Sons, 2012).
[6] Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit* (Bandung: Informatika, 2016), 357.

menghitung sentralitas keantaraan masing-masing titik pada graf sederhana tak berarah yang berbobot. Nilai sentralitas keantaraan ini dapat digunakan untuk menentukan titik mana yang menjadi titik pusat graf atau jaringan yang sedang dianalisis.

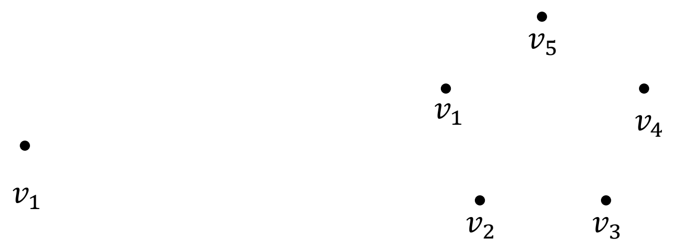
BAB II
TEKS UTAMA

A. Graf (*Graph*)

Suatu graf yang dinotasikan $G = (V, E)$ adalah pasangan himpunan tak nol V yang merupakan himpunan titik (*vertex*) dan himpunan E dengan anggotanya adalah sisi (*edge*) yang menghubungkan paling tidak dua titik dalam himpunan V.[7] Di sini perlu diingat bahwa himpunan titik tidak boleh kosong sedangkan himpunan sisinya boleh. Graf yang hanya memiliki titik tanpa adanya sisi yang menghubungkannya (0 sisi) disebut sebagai graf kosong. Graf kosong yang hanya terdiri dari 1 titik disebut sebagai graf trivial.[8] Contoh graf kosong bisa dilihat pada gambar berikut.

Gambar 3.

Contoh Graf Kosong



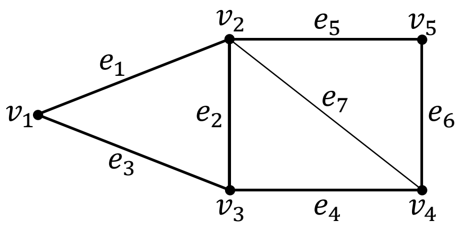
(a) Graf Kosong (Graf Trivial) **(b) Graf Kosong (Graf Non-Trivial)**

Pada graf G, jumlah titik dinotasikan dengan $|V|$ sedangkan jumlah sisinya dinotasikan dengan $|E|$.[9] Jumlah titik pada gambar 3 secara berturut-turut adalah $|V| = |\{v_1\}| = 1$ dan $|V| = |\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, \}| = 5$ sedangkan jumlah sisinya sama yaitu $|E| = 0$. Misalkan diberikan contoh lain dari graf yang tak kosong:

[7] Gary Chartrand, Linda Lesniak, & Ping Zhang, *Graphs & Digraphs, Sixth Edition* (New York: CRC Press, 2015), 3.
[8] Ibid, 4.
[9] Ibid, 3.

Gambar 4.

Contoh Graf



Pada Gambar 4, diketahui bahwa himpunan $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan himpunan $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$. Dengan demikian, $|V| = 5$ dan $|E| = 7$. Untuk derajat setiap titik, dapat dicari dengan menghitung jumlah sisi yang bersisian dengan titik tersebut. Misalkan *v* adalah suatu titik pada graf *G* yang akan dicari derajatnya maka notasi derajat titik *v* adalah $d(v)$.[10] Pada Gambar 3, derajat setiap titik sama yaitu 0 dikarenakan $|E| = 0$ sedangkan pada Gambar 4, derajat masing-masing titik adalah: $d(v_1) = d(v_5) = 2$, $d(v_2) = 4$, dan $d(v_3) = d(v_4) = 3$.

B. Jenis-jenis Graf

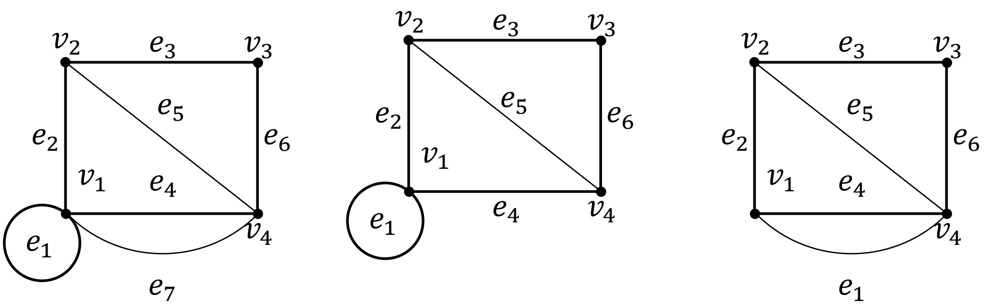
Suatu graf $G = (V, E)$ disebut sebagai graf sederhana (*simple graph*) jika *G* tidak memiliki gelang (*loop*) ataupun sisi ganda (*multiple edges*). Graf pada gambar 4 adalah contoh graf sederhana. Jika graf *G* memiliki *loop* dan *multiple edges* (Gambar 5a) atau hanya memiliki *loop* saja (Gambar 5b) maka *G* disebut sebagai graf semu (*pseudograph*). Gelang di sini artinya sisi yang menghubungkan dua titik yang sama (titik awal sama dengan titik akhir). Selanjutnya, jika graf *G* hanya memiliki sisi ganda dan tidak memiliki gelang maka *G* disebut graf ganda (*multigraph*). Pengertian sisi ganda di sini adalah dua titik yang dihubungkan oleh lebih dari 1 sisi. Contoh graf semu dan graf ganda dapat dilihat pad gambar 5.[11]

[10] Ibid, 5.

[11] Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit* (Bandung: Informatika, 2016), 357-358.

Gambar 5.

Contoh Graf Semu dan Graf Ganda

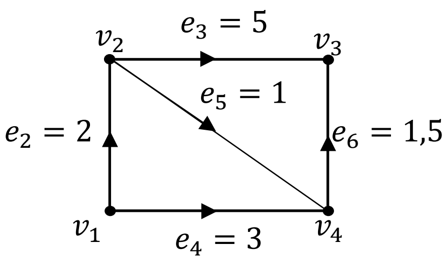


a. Graf Semu **b. Graf Semu** **c. Graf Ganda**

Suatu graf disebut graf berarah jika sisi-sisinya berarah (*directed graph*) dan jika tidak maka disebut sebagai graf tidak berarah (*undirected graph*).[12] Berdasarkan bobotnya, suatu graf disebut graf berbobot (*weighted graph*) jika sisi-sisinya memiliki nilai atau bobot. Graf berbobot disebut juga graf berlabel. Graf yang tidak memiliki bobot disebut sebagai graf tidak berbobot (*unweighted graph*).[13] Gambar 4 dan 5 adalah contoh graf tidak berarah dan tidak berbobot sedangkan Gambar 6 berikut adalah contoh graf sederhana berarah dan berbobot.

Gambar 6.

Graf Sederhana Berarah dan Berbobot



[12] Rinaldi Munir, *Matematika Diskrit* (Bandung: Informatika, 2016), 358.
[13] Ibid, 376.

C. Lintasan Terpendek (*Shortest Path*)

Misalkan diketahui suatu graf sederhana tak berarah $G = (V, E)$ memiliki himpunan titik $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ dan himpunan sisi $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_m\}$ dengan $n = 1,2,3, \dots$ dan $m = 1,2,3, \dots$ maka sebuah jalan (*walk*) dalam graf *G* yang dinotasikan dengan *W* dari titik awal v_1 ke titik tujuan v_n adalah barisan selang-seling titik dan sisi dalam *G* yaitu $W = v_1, e_1, v_2, e_2, \dots, e_m, v_n$. Suatu jalan *W* yang semua sisi-sisinya berbeda disebut sebagai jejak (*trail*) yang dinotasikan dengan *T*. Selanjutnya, suatu jejak yang semua titik-titiknya berbeda disebut sebagai lintasan (*path*) yang dinotasikan dengan *L*.[14] Misalkan diambil contoh pada Gambar 4 dengan titik awalnya v_2 dan titik tujuannya v_3 maka contoh jalan, jejak dan lintasan dari v_2 ke v_3 adalah:

$$W = v_2, e_7, v_4, e_6, v_5, e_6, v_4, e_4, v_3$$

$$T = v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_7, v_2, e_2, v_3$$

$$L = v_2, e_5, v_5, e_6, v_4, e_4, v_3$$

Pada graf berbobot, jika terdapat lintasan dari suatu titik (misalkan *u*) ke titik lain (misalkan v) maka lintasan terpendek (*shortest path*) dari *u* ke *v* adalah lintasan dengan jarak minimum. Adapun jarak di sini merupakan jumlah bobot pada sisi-sisi dalam lintasan antara *u* dan *v*.[15] Ada berbagai algoritma yang sudah dibahas untuk menyelesaikan masalah lintasan terpendek (*shortest path problem*) seperti algoritma Dijkstra, Kruskal, Floyd-Warshall dan lain sebagainya yang tidak akan dibahas lebih lanjut dalam makalah ini.

D. Sentralitas Keantaraan (*Betweenness Centrality*)

Dalam SNA, sentralitas merupakan ukuran yang digunakan untuk mengidentifikasi titik mana yang menonjol atau memegang peran penting dalam jaringan.[16] Dalam graf, sentralitas keantaraan menunjukkan titik mana yang berperan sebagai perantara. Hal ini bisa dilihat dari seberapa sering titik

---

[14] J. L. Gross & Jay Yellen, *Handbook of Graph Theory: Discrete Mathematics and its Applications* (Amerika: CRC Press, 2003), 9.

[15] V.K. Balakrishnan, *Schaum's Outline of Graph Theory* (USA: The McGraw-Hill, 1997), 118.

[16] Eriyanto, *Analisis Jaringan Komunikasi* (Jakarta: Kencana, 2014), 168.

yang diamati muncul dalam lintasan terpendek antara 2 titik. Semakin tinggi nilai sentralitas keantaraannya maka interpretasinya adalah semakin penting peran titik tersebut dalam graf. Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf berbobot maka sentralitas keantaraan setiap titik dapat dirumuskan sebagai berikut:

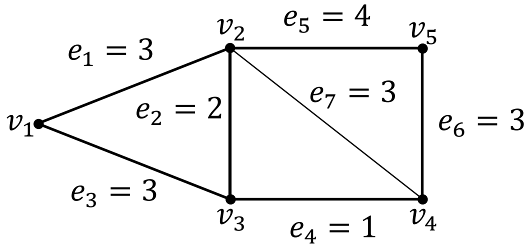
$$SK(v_i) = \sum_{s \neq t \neq v_i} \frac{\sigma_{st}(v_i)}{\sigma_{st}}$$

$SK(v_i)$	=	Nilai sentralitas keantaraan titik v_i
$\sigma_{st}(v_i)$	=	Jumlah lintasan terpendek yang mungkin dari titik *s* ke titik *t* yang melalui titik v_i
σ_{st}	=	Jumlah lintasan terpendek yang mungkin dari titik *s* ke titik *t*
i	=	$1,2,3,\dots,n$
n	=	Jumlah titik pada graf dengan $\{v_i, s, t\} \in V$

Seperti yang sudah disebutkan sebelumya, graf yang akan digunakan untuk menghitung sentralitas keantaraan masing-masing titik dalam makalah ini adalah graf sederhana tak berarah dan berbobot. Misalkan Gambar 4 diberikan bobot pada setiap sisinya sebagai berikut:

Gambar 7.

Graf Sederhana Tak Berarah dan Berbobot



Nilai sentralitas keantaraan masing-masing titik adalah:

$$SK(v_1) = \frac{\sigma_{v_2v_3}(v_1)}{\sigma_{v_2v_3}} + \frac{\sigma_{v_2v_4}(v_1)}{\sigma_{v_2v_4}} + \frac{\sigma_{v_2v_5}(v_1)}{\sigma_{v_2v_5}} + \frac{\sigma_{v_3v_4}(v_1)}{\sigma_{v_3v_4}} + \frac{\sigma_{v_3v_5}(v_1)}{\sigma_{v_3v_5}} + \frac{\sigma_{v_4v_5}(v_1)}{\sigma_{v_4v_5}}$$

$$= \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} = 0$$

$$SK(v_2) = \frac{\sigma_{v_1v_3}(v_2)}{\sigma_{v_1v_3}} + \frac{\sigma_{v_1v_4}(v_2)}{\sigma_{v_1v_4}} + \frac{\sigma_{v_1v_5}(v_2)}{\sigma_{v_1v_5}} + \frac{\sigma_{v_3v_4}(v_2)}{\sigma_{v_3v_4}} + \frac{\sigma_{v_3v_5}(v_2)}{\sigma_{v_3v_5}} + \frac{\sigma_{v_4v_5}(v_2)}{\sigma_{v_4v_5}}$$

$$= \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} = 0{,}5$$

$$SK(v_3) = \frac{\sigma_{v_1v_2}(v_3)}{\sigma_{v_1v_2}} + \frac{\sigma_{v_1v_4}(v_3)}{\sigma_{v_1v_4}} + \frac{\sigma_{v_1v_5}(v_3)}{\sigma_{v_1v_5}} + \frac{\sigma_{v_2v_4}(v_3)}{\sigma_{v_2v_4}} + \frac{\sigma_{v_2v_5}(v_3)}{\sigma_{v_2v_5}} + \frac{\sigma_{v_4v_5}(v_3)}{\sigma_{v_4v_5}}$$

$$= \frac{0}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} = 2$$

$$SK(v_4) = \frac{\sigma_{v_1v_2}(v_4)}{\sigma_{v_1v_2}} + \frac{\sigma_{v_1v_3}(v_4)}{\sigma_{v_1v_3}} + \frac{\sigma_{v_1v_5}(v_4)}{\sigma_{v_1v_5}} + \frac{\sigma_{v_2v_3}(v_4)}{\sigma_{v_2v_3}} + \frac{\sigma_{v_2v_5}(v_4)}{\sigma_{v_2v_5}} + \frac{\sigma_{v_3v_5}(v_4)}{\sigma_{v_3v_5}}$$

$$= \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{1}{1} = 1{,}5$$

$$SK(v_5) = \frac{\sigma_{v_1v_2}(v_5)}{\sigma_{v_1v_2}} + \frac{\sigma_{v_1v_3}(v_5)}{\sigma_{v_1v_3}} + \frac{\sigma_{v_1v_4}(v_5)}{\sigma_{v_1v_4}} + \frac{\sigma_{v_2v_3}(v_5)}{\sigma_{v_2v_3}} + \frac{\sigma_{v_2v_4}(v_5)}{\sigma_{v_2v_4}} + \frac{\sigma_{v_3v_4}(v_5)}{\sigma_{v_3v_4}}$$

$$= \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{1} = 0$$

Dari perhitungan di atas, dapat dilihat bahwa titik yang memiliki nilai sentralitas keantaraan tertinggi adalah titik v_3. Hal ini bisa disimpulkan bahwa v_3 memegang peranan penting sebagai perantara dalam jaringan. Secara sekilas, v_2 terlihat seperti titik pusat dalam jaringan karena banyaknya sisi yang menghubungkan v_2 dengan titik-titik lainnya. Namun, berdasarkan sentralitas keantaraan, titik v_3 yang merupakan titik pusat dalam graf pada Gambar 7. Selanjutnya, sentralitas keantaraan tertinggi kedua setelah v_3 adalah v_4. Apakah ini berarti jika v_3 hilang maka v_4 akan menjadi perantara pengganti v_3? Jawabannya tidak. Jika v_3 hilang atau dihapus maka hal ini akan merubah nilai sentralitas keantaraan masing-masing titik. Secara sekilas, dapat dilihat bawah jika v_3 hilang maka peran penting dalam graf akan berpindah ke v_2. Hal ini disebabkan v_2 menjadi satu-satunya titik yang menghubungkan v_1 dengan titik-titik lainnya.

BAB III
PENUTUP

A. Kesimpulan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika murni yang sering digunakan dalam berbagai bidang. Salah satunya yaitu dalam *Social Network Analysis* (SNA) atau analisis jaringan sosial. Graf dalam SNA merepresentasikan jaringan sosial yang sedang dianalisis. Adapun sentralitas keantaraan titik pada graf dalam SNA berfungsi untuk menunjukkan seberapa penting suatu titik pada graf. Semakin tinggi nilai sentralitas keantaraannya maka semakin penting peran titik tersebut dalam graf. Titik yang memiliki nilai sentralitas keantaraan tertinggi disebut sebagai titik perantara. Cara menghitug nilai keantaraan suatu titik yaitu mencari berapa kali titik tersebut dilewati dalam lintasan terpendek antar 2 titik dibagi dengan jumlah seluruh lintasan terpendek yang mungkin antar 2 titik tersebut.

B. Saran

Pada makalah ini, graf yang dibahas untuk dicari nilai sentralitas keantaraannya adalah graf sederhana tak berarah yang berbobot. Oleh karena itu, diperlukan pembahasan lebih lanjut untuk jenis graf yang lain seperti graf sederhana berarah, graf tak sederhana berarah, dan lain sebagainya. Selanjutnya, saran yang bisa disampaikan terkait sentralitas keantaraan adalah jika terdapat perubahan dalam graf baik itu penghapusan titik atau sisi maka perlu dilakukan perhitungan ulang terhadap nilai sentralitas keantaraan masing-masing titik pada graf yang baru. Untuk graf yang lebih komples yaitu graf dengan jumlah titik dan sisi cukup banyak, disarankan untuk memanfaatkan *software* atau pemrograman tertentu untuk membantu dalam menghitung nilai keantaraannya.

DAFTAR RUJUKAN

Balakrishnan, V.K., *Schaum's Outline of Graph Theory*. USA: The McGraw-Hill, 1997.

Chartrand, G., Lesniak, L., & Zhang, Ping, *Graphs & Digraphs*, *Sixth Edition*. New York: CRC Press, 2015.

Daniel, Farida & Taneo, Prida N.L. *Teori Graf*. Yogyakarta: Deepublish, 2019.

Dehmer, Matthias & Basak, Subhash C. *Statistical and Machine Learning Approaches for Network Analysis*. Amerika: John Wiley & Sons, 2012.

Eriyanto. *Analisis Jaringan Komunikasi*. Jakarta: Kencana, 2014.

Gross, J. L. & Yellen, Jay. *Handbook of Graph Theory: Discrete Mathematics and its Applications*. Amerika: CRC Press, 2003.

Munir, Rinaldi. *Matematika Diskrit*. Bandung: Informatika, 2016.

Trudeau, R.J. *Introduction to Graph Theory*. North Chelmsford: Courier Cooperation, 2013.

https://en.wikipedia.org/wiki/File:Konigsberg