MASRUROTULLAILY

DIKTAT ALJABAR LINIER

(MATRIKS DAN SISTEM PERSAMAAN LINIER)

PROGRAM STUDI
TADRIS MATEMATIKA

Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan
Institut Agama Islam Negeri Jember

2020

IAIN JEMBER

DIKTAT

ALJABAR LINIER

(Matriks dan Sistem Persamaan Linier)

Penulis:

Masrurotullaily

PROGRAM STUDI TADRIS MATEMATIKA

FAKULTAS TARBIYAH DAN ILMU KEGURUAN

INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI JEMBER

2020

LEMBAR PENGESAHAN

Diktat Aljabar Linier (Matriks dan Sistem Persamaan Linier) ini disusun oleh:

Nama	: Masrurotullaily, M.Sc.
NIP	: 199101302019032008

Dan digunakan untuk kalangan sendiri sebagai bahan ajar pada:

Mata Kuliah	: Aljabar Linier
Semester	: Genap
Tahun akademik	: 2019/2020
Program studi	: Tadris Matematika
Fakultas	: Tarbiyah dan Ilmu Keguruan
Institut	: IAIN Jember
Disahkan pada Tanggal	: 17 Februari 2020

Mengesahkan:
Wakil Dekan I FTIK IAIN Jember

Dr. H. Mashudi, M.Pd.
NIP.197209182005011003

KATA PENGANTAR

Puji syukur atas nikmat dan hidayah Allah SWT atas terselesaikannya penyusunan diktat mata kuliah Aljabar Linier (Matriks dan Sistem Persamaan Linier). Diktat ini berisi ringkasan materi terkait matriks, determinan dan inversnya. Di awal bab, kemampuan akhir yang diharapkan selalu dicantumkan dan setiap setelah penjelasan materi, contoh-contoh diberikan untuk memudahkan pembaca dalam memahami materi.

Diktat ini juga memuat materi tentang sistem persamaan linier yang juga dilengkapi dengan contoh-contoh untuk memperjelas topik yang dibahas. Latihan soal diberikan di setiap akhir bab untuk melatih kemampuan pembaca setelah memahami materi dan contoh-contohnya. Akhir kata, dengan adanya diktat ini, diharapkan pembaca dapat mencapai kemampuan akhir yang diharapkan penulis dalam pembahasan matriks dan sistem persamaan linier.

Penulis

DAFTAR ISI

Halaman

BAB 1
MATRIKS

Kemampuan akhir yang diharapkan:

- ✓ Mahasiswa mampu menjelaskan definisi matriks
- ✓ Mahasiswa mampu memberikan contoh matriks
- ✓ Mahasiswa mampu mengkategorikan matriks berdasarkan jenis-jenisnya
- ✓ Mahasiswa mampu membanding dua matriks
- ✓ Mahasiswa mampu menerapkan operasi aljabar pada matriks
- ✓ Mahasiswa mampu membuktikan kebenaran aturan-aturan ilmu hitung matriks

1.1. Pengertian Matriks

Sebuah matriks A berordo $m \times n$ adalah himpunan skalar baik bilangan riil maupun kompleks yang disusun dalam bentuk segi empat berbaris m dan berkolom n seperti berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

dengan $m = 1, 2, 3, \ldots$ dan $n = 1, 2, 3, \ldots$ Adapun $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{mn}$ disebut sebagai elemen-elemen atau entri-entri matriks A.

Latihan Soal 1.1.

1) Silahkan tuliskan kembali definisi matriks dengan bahasa Anda sendiri.

   Jawab: …………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………
   …………………………………………………………………………………

2) Berikan satu contoh matriks berordo 2×2, 3×5 dan 4×1.

Jawab: ………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

1.2. Jenis-jenis Matriks

a. Matriks Nol

Matriks nol merupakan matriks yang semua elemennya adalah nol.

Contoh 1.1:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Matriks Baris

Matriks baris merupakan matriks yang hanya memiliki 1 baris saja.

Contoh 1.2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

c. Matriks Kolom

Matriks kolom merupakan matriks yang hanya memiliki 1 kolom saja.

Contoh 1.3:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

d. Matriks Persegi

Matriks persegi merupakan matriks yang memiliki jumlah baris dan kolom yang sama.

Contoh 1.4:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

e. Matriks Diagonal

Matriks diagonal merupakan matriks persegi yang semua elemennya adalah nol kecuali diagonal utamanya.

Contoh 1.5:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

f. Matriks Skalar

Matriks skalar merupakan matriks diagonal yang elemen diagonal utamanya sama.

Contoh 1.6:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

g. Matriks Identitas

Matriks identitas adalah matriks skalar yang elemen diagonal utamanya adalah 1. Matriks identitas biasanya dinotasikan dengan *I*.

Contoh 1.7:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

h. Matriks Segitiga Atas

Matriks segitiga atas merupakan matriks persegi yang elemen-elemen di bawah diagonal utama adalah nol.

Contoh 1.8:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

i. Matriks Segitiga Bawah

Matriks segitiga bawah merupakan matriks persegi yang elemen-elemen di atas diagonal utama adalah nol.

Contoh 1.9:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Latihan Soal 1.2

Tentukan jenis-jenis matriks-matriks berikut!

1)	$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$	Jawab: …………………………….
2)	$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$	Jawab: …………………………….
3)	$C = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 1 & 4 \\ -5 & -9 & 4 & 2 \\ 5 & -9 & -9 & -1 \\ \frac{1}{3} & 2 & \frac{1}{3} & -9 \end{bmatrix}$	Jawab: …………………………….
4)	$D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	Jawab: …………………………….
5)	$E = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	Jawab: …………………………….
6)	$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Jawab: …………………………….

7)	$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$	Jawab: ....
8)	$H = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$	Jawab: ....
9)	$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	Jawab: ....
10)	$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$	Jawab: ....

1.3. Kesamaan Dua Matriks

Dua buah matriks dikatakan sama jika berordo sama dan elemen-elemen yang seletak juga sama.

Contoh 1.10:

Diketahui matriks *A* dan *B* sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan apakah $A = B$.

Jawab:

i. Ordo *A* = 2 × 2 dan ordo *B* = 2 × 2

ii. Elemen-elemen yang seletak:

$$a_{11} = b_{11} = 1$$

$$a_{12} = b_{12} = 0$$

$$a_{21} = b_{21} = -6$$

$$a_{22} = b_{2} = 3$$

iii. Pada poin (i) dan (ii), dapat dilihat bahwa ordo dan semua elemen seletak kedua matriks sama maka dapat disimpulkan bahwa $A = B$

Contoh 1.11:

Diketahui matriks *P* dan *Q* sebagai berikut:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Tentukan apakah $P = Q$.

Jawab:

i. Ordo *P* = 2 × 3 dan ordo *Q* = 2 × 3

ii. Elemen-elemen yang seletak:

$$p_{11} = q_{11} = 1$$

$$p_{12} = q_{12} = 0$$

$$p_{13} \neq q_{13}$$

$$p_{21} = q_{21} = -6$$

$$p_{22} = q_{22} = 3$$

$$p_{33} \neq q_{33}$$

iii. Pada poin (ii), dapat dilihat bahwa ada elemen-elemen seletak yang tidak sama maka dapat disimpulkan bahwa $P \neq Q$

Contoh 1.12:

Jika diketahui matriks *A* dan *B* berikut merupakan dua matriks yang sama maka tentukan nilai *x* dan *y*.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ x - y & x + y \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Dikarenakan $A = B$ maka

i. $a_{21} = b_{21}$

$x - y = 1$

ii. $a_{22} = b_{22}$

$x + y = -5$

iii. Poin (i) dan (ii):

$$\begin{array}{r} x - y = 1 \\ x + y = -5 \quad + \\ \hline 2x = -4 \\ x = -2 \\ y = -3 \end{array}$$

Jadi, nilai *x* adalah -2 dan *y* adalah -3

Latihan Soal 1.3

Tentukan nilai *a* dan *b* jika diketahui dua buah matriks berikut memiliki kesamaan.

$$A = \begin{bmatrix} ab & 1 & 0 \\ -1 & a+b & -2 \\ 12 & -9 & a-b \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 12 & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

Jawab: ……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

1.4. Operasi Aljabar pada Matriks

a. Penjumlahan pada Matriks

Dua matriks atau lebih dapat dijumlahkan jika memiliki ordo yang sama. Adapun cara menjumlahkannya yaitu dengan menjumlahkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh 1.13:

Tentukan hasil penjumlahan matriks *A* dan *B* berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+2 \\ -6+5 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Jadi, hasil penjumlahan matriks *A* dan *B* adalah $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

b. Pengurangan pada Matriks

Pengurangan pada matriks kurang lebih sama dengan penjumlahan pada matriks. Dua matriks yang akan dikurangkan harus memiliki ordo yang sama. Adapun cara mengurangkannya yaitu dengan mengurangkan elemen-elemen yang seletak.

Contoh 1.14:

Tentukan hasil pengurangan matriks *A* oleh matriks *B* pada Contoh 1.13.

Jawab:

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-1 & 0-2 \\ -6-5 & 3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -11 & 0 \end{bmatrix}$$

Jadi, hasil pengurangan matriks *A* oleh matriks *B* adalah $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -11 & 0 \end{bmatrix}$

c. Perkalian Matriks dengan Skalar

Suatu matriks jika dikalikan dengan sebuah skalar *k* maka matriks yang diperoleh merupakan matriks yang setiap elemen-elemennya dikalikan dengan *k*.

Contoh 1.15:

Tentukan hasil perkalian matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ dengan sebuah bilangan $k = -4$.

Jawab:

$$kA = -4A = -4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \times 1 & -4 \times 0 \\ -4 \times -6 & -4 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 24 & -12 \end{bmatrix}$$

Jadi, hasil perkalian matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ dengan sebuah bilangan $k = -4$ adalah $\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 24 & -12 \end{bmatrix}$

d. Perkalian Dua Matriks

Perkalian dua matriks dapat dilakukan jika jumlah kolom matriks pertama sama dengan jumlah baris matriks kedua. Adapun matriks yang merupakan hasil perkalian dua matriks akan memiliki jumlah baris sama dengan jumlah baris pada matriks pertama dan jumlah kolomnya sama dengan jumlah kolom pada matriks kedua. Untuk lebih jelasnya, misalkan matriks *A* berordo $m \times e$, matriks *B* berukuran $e \times n$ dan *C* adalah matriks hasil perkalian matriks *A* dan *B* maka matriks *C* diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C &= A \times B \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1e} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2e} \\ \dots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{me} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \dots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{e1} & b_{e2} & \cdots & b_{en} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1e}b_{e1} & \cdots & a_{11}b_{1n} + a_{12}b_{2n} + \cdots + a_{1e}b_{en} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2e}b_{e1} & \cdots & a_{21}b_{1n} + a_{22}b_{2n} + \cdots + a_{2e}b_{en} \\ \dots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{me}b_{e1} & \cdots & a_{m1}b_{1n} + a_{m2}b_{2n} + \cdots + a_{me}b_{en} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & \cdots & c_{2n} \\ \dots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sederhananya, elemen-elemen matriks $C = c_{ij} = \sum_{k=1}^{e} a_{ik}b_{kj}$ dengan $i = 1, 2, \dots, m$ dan $j = 1, 2, \dots, n$

Contoh 1.16:

Tentukan hasil perkalian dua matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Matriks *A* berordo 2×3 dan matriks *B* berordo 3×2. Dikarenakan jumlah kolom matriks *A* sama dengan jumlah baris matriks *B* maka *A* dan *B* dapat dikalikan dan matriks hasil perkaliannya akan berordo 2×2.

$$\begin{aligned} A \times B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -6 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \times 4 + 0 \times 2 + 4 \times 1 & 1 \times 1 + 0 \times 7 + 4 \times 2 \\ -6 \times 4 + 3 \times 2 + 2 \times 1 & -6 \times 1 + 3 \times 7 + 2 \times 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -16 & 19 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, hasil perkalian matriks *A* dan *B* adalah $\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -16 & 19 \end{bmatrix}$.

e. Perpangkatan Matriks

Perpangkatan matriks ini hanya berlaku pada matriks persegi. Misalkan *A* merupakan sebuah matriks persegi berordo $n \times n$ maka:

i. $A^2 = A \times A, \quad A^3 = A^2 \times A = (A \times A) \times A, \quad \ldots, \quad A^m = A^{m-1} \times A$ dengan $m = 1, 2, 3, \ldots$

ii. $A^0 = I$.

iii. $A^{-m} = (A^{-1})^m$

iv. $A^r A^s = A^{r+s}$

v. $(A^r)^s = A^{rs}$

Contoh 1.17:

Tentukan hasil A^2 dan B^3 dari matriks berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$A^2 = A \times A$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \times 4 + 0 \times 1 + 0 \times 2 & 4 \times 0 + 0 \times (-5) + 0 \times 3 & 4 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 2 \\ 1 \times 4 + (-5) \times 1 + 0 \times 2 & 1 \times 0 + (-5) \times (-5) + 0 \times 3 & 1 \times 0 + (-5) \times 0 + 0 \times 2 \\ 2 \times 4 + 3 \times 1 + 2 \times 2 & 2 \times 0 + 3 \times (-5) + 2 \times 3 & 2 \times 0 + 3 \times 0 + 2 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -1 & 25 & 0 \\ 15 & -9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = B^2 \times B$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \times 0 + 4 \times 3 & 0 \times 4 + 4 \times 2 \\ 3 \times 0 + 2 \times 3 & 3 \times 4 + 2 \times 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 6 & 16 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 \times 0 + 8 \times 3 & 12 \times 4 + 8 \times 2 \\ 6 \times 0 + 16 \times 3 & 6 \times 4 + 16 \times 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 24 & 64 \\ 48 & 56 \end{bmatrix}$$

Jadi, $A^2 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & 0 \\ -1 & 25 & 0 \\ 15 & -9 & 4 \end{bmatrix}$ dan $B^3 = \begin{bmatrix} 24 & 64 \\ 48 & 56 \end{bmatrix}$

f. Transpos Matriks

Misalkan diketahui sebuah matriks *A* berordo $m \times n$ dan *B* adalah matriks hasil transpos dari matriks *A* maka *B* adalah matriks berordo $n \times m$ dengan elemen-elemen matriks *B* yaitu $b_{ij} = a_{ji}$ dengan $i = 1, 2, \dots, n$ dan $j = 1, 2, \dots, m$. Hasil transpos suatu matriks juga biasanya dituliskan sebagai A^T. Adapun sifat-sifat transpos matriks adalah sebagai berikut:

i. $(A^t)^t = A$.

ii. $(A + B)^t = A^t + B^t$.

iii. $(kA)^t = kA^t$ dengan k adalah sebarang skalar.

iv. $(AB)^t = B^t A^t$

Contoh 1.18:

Tentukan hasil transpos matriks *A* berikut

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Matriks *A* berordo 3 × 2 maka matriks A^T akan berordo 2 × 3 dengan entri-entrinya:

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Jadi, $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$

Latihan Soal 1.4

Diketahui matriks-matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 0 & -1 & \frac{3}{2} \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Tentukan:

1) $A + B$
2) $A - B$
3) $B - A$
4) $2A$
5) $-3B$
6) $\frac{5}{2}C$
7) $A \times B$
8) $B \times A$
9) $C \times A$
10) $C \times B$
11) A^2
12) B^3
13) A^t
14) B^t
15) C^t
16) $(A + B)^t$
17) $(-5A)^t$
18) $(-B)^t$
19) $(6C)^t$
20) $(AB)^t$
21) $A^t \times B^t$
22) $A \times C^t$
23) $B \times C^t$
24) $C \times C^t$

Jawab: ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

1.5. Aturan-aturan Ilmu Hitung Matriks

Jika *k* dan *l* adalah konstanta dan *A*, *B*, dan *C* merupakan matriks-matriks yang ukurannya sedemikian sehingga operasi aljabar pada matriks dapat diterapkan maka aturan-aturan ilmu hitung berikut dianggap benar:

a. $A + B = B + A$ (hukum komutatif untuk penambahan)
b. $A + (B + C) = (A + B) + C$ (hukum asosiatif untuk penambahan)
c. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ (hukum asosiatif untuk perkalian)
d. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ (hukum distributif)
e. $(B + C) \times A = B \times A + C \times A$ (hukum distributif)
f. $A \times (B - C) = A \times B - A \times C$
g. $(B - C) \times A = B \times A - C \times A$
h. $k(B + C) = kB + kC$
i. $k(B - C) = kB - kC$
j. $(k + l)A = kA + lA$
k. $(k - l)A = kA - lA$
l. $(kl)A = k(lA)$
m. $k(A \times B) = (kA) \times B = A \times (kC)$

Latihan Soal 1.5

Buktikan kebenaran aturan-aturan ilmu hitung matriks yang disebutkan di atas (subbab 1.5 poin a sampai dengan m)

Jawab: ………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………

BAB 2
DETERMINAN MATRIKS

Kemampuan akhir yang diharapkan:

- ✓ Mahasiswa mampu menjelaskan definisi determinan matriks
- ✓ Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat determinan matriks
- ✓ Mahasiswa mampu menghitung determinan matriks dengan aturan Sarrus
- ✓ Mahasiswa mampu menghitung determinan matriks dengan metode ekspansi kofaktor
- ✓ Mahasiswa mampu menghitung determinan matriks dengan metode reduksi baris

2.1. Pengertian Determinan Matriks

Sebuah matriks persegi dapat dihubungkan dengan suatu skalar yang disebut dengan determinan. Misalkan *A* adalah sebuah matriks persegi maka determinan *A* dinotasikan dengan $\det(A)$ atau $|A|$. Jika *A* adalah matriks persegi berordo 2×2 maka determinannya dapat diperoleh dengan cara berikut:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

Cara menentukan determinan di atas disebut juga sebagai **aturan Sarrus**.

Contoh 2. 1:

Tentukan determinan matriks *A* berikut

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times (-5) - 1 \times 0 \\ &= -20 \end{aligned}$$

Jadi, determinan matriks *A* adalah -20.

Latihan Soal 2.1.

Silahkan tuliskan kembali definisi determinan matriks dengan bahasa Anda sendiri.

Jawab: …………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

2.2. Sifat-sifat Determinan Matriks

Misalkan A adalah matriks bujursangkar. Adapun sifat-sifat determinan matriks adalah sebagai berikut:

a. $|A| = |A^t|$
b. $|AB| = |A||B|$
c. Jika A adalah matriks segitiga atas/bawah atau matriks diagonal maka determinan A adalah hasil kali elemen diagonal utamanya ($|A| = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$).
d. Jika A memiliki sebuah baris atau kolom yang semua elemennya adalah nol maka $|A| = 0$
e. Jika A memiliki 2 baris/kolom yang sama maka $|A| = 0$
f. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari perkalian baris tunggal A dengan konstanta k maka $|B| = k|A|$
g. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari pertukaran dua baris A maka $|B| = -|A|$
h. Jika B adalah matriks yang dihasilkan dari kelipatan satu baris A yang ditambahkan pada baris lain maka $|B| = |A|$

Latihan Soal 2.2.

Buktikan bahwa sifat determinan berikut benar.

a. $|A| = |A^t|$

b. $|AB| = |A||B|$

Jawab: …………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

2.3. Menentukan Determinan Matriks

2.3.1. Aturan Sarrus

Aturan Sarrus untuk matriks persegi berordo 2×2 sudah dijabarkan caranya pada subbab 2.1. Untuk matriks persegi berordo 3×3, menentukan matriksnya dengan aturan sarrus adalah sebagai berikut:

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

maka

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \\ &= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) \\ &\qquad - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12}) \end{aligned}$$

Cara ini hanya berlaku untuk matriks persegi berordo 3×3.

Contoh 2. 2:

Tentukan determinan matriks berikut menggunakan aturan Sarrus:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Jawab:

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 4 & 2 \\ 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{matrix} \\ &= (4.(-5).2 + 2.6.2 + 1.1.3) - (2.(-5).1 + 3.6.4 + 2.1.2) \\ &= (-40 + 24 + 3) - (-10 + 72 + 4) \\ &= (-13) - (66) \\ &= -79 \end{aligned}$$

Jadi, determinan matriks *A* adalah -79

2.3.2. Ekspansi Kofaktor

Misalkan A adalah matriks persegi berordo $n \times n$ maka **minor entri a_{ij}**, dinotasikan dengan M_{ij}, merupakan determinan submatriks setelah baris ke-i dan ke-j dihapus dari matriks A sedangkan **kofaktor entri a_{ij}**, dinotasikan dengan C_{ij}, sama dengan $(-1)^{i+j}M_{ij}$ yang mana $i = 1, 2, 3, \dots, n$ dan $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Adapun determinan A dapat dicari dengan cara mengalikan entri-entri dalam suatu baris/kolom dengan kofaktor-kofaktornya dan menambahkan hasil kalinya.

a. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke-i

$$|A| = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

b. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke-j

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

Contoh 2. 3:

Tentukan determinan matriks pada Contoh 2.2. menggunakan metode ekspansi kofaktor:

a. sepanjang baris ke-1.
b. sepanjang kolom ke-1.

Jawab:

a. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang baris ke-1

$$\begin{aligned} C_{11} &= (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 M_{11} \\ &= M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 18 = -28 \\ C_{12} &= (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3 M_{12} \\ &= -M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - 12) = 10 \\ C_{13} &= (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4 M_{13} \\ &= M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13 \\ |A| &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 4.(-28) + 2.10 + 1.13 \\ &= -112 + 20 + 13 \\ &= -79 \end{aligned}$$

b. Determinan dengan Ekspansi Kofaktor sepanjang kolom ke-1

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 M_{11}$$

$$= M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 18 = -28$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3 M_{21}$$

$$= -M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(4-3) = -1$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4 M_{31}$$

$$= M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 12 - (-5) = 17$$

$$|A| = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + a_{31}C_{31}$$

$$= 4.(-28) + 1.(-1) + 2.17$$

$$= -112 + (-1) + 34$$

$$= -79$$

Jadi, determinan matriks *A* adalah -79

2.3.3. Reduksi Baris

Metode ini sangat cocok digunakan untuk menghindari perhitungan yang sangat banyak. Adapun operasi-operasi yang digunakan disebut sebagai **operasi baris elementer** (**OBE**) yaitu:

a. Sebuah baris dapat dikalikan dengan sebuah konstanta yang tak sama dengan nol. Jika operasi ini dilakukan maka berlaku sifat determinan 2.2 poin f.
b. Dua baris dapat dipertukarkan. Jika operasi ini dilakukan maka berlaku sifat determinan 2.2 poin g.
c. Perkalian suatu baris dengan suatu konstanta dapat ditambahkan ke baris yang lainnya. Jika operasi ini dilakukan maka berlaku sifat determinan 2.2 poin h.

OBE ini dilakukan untuk memperoleh matriks berbentuk matriks segitiga atas/bawah atau matriks diagonal agar sifat determinan 2.2 poin c bisa digunakan. Untuk lebih mudahnya, OBE ini digunakan untuk memperoleh matriks segitiga atas.

Contoh 2. 4:

Tentukan determinan matriks pada Contoh 2.2. menggunakan metode reduksi baris.

Jawab:

Misalkan baris pada matriks dinotasikan sebagai *b*. Matriks *A* berordo 3×3 sehingga untuk memperoleh matriks segitiga atas dari matriks *A* maka OBE digunakan sedemikian sehingga semua entri di bawah diagonal utama bernilai nol.

- Lihat kolom pertama (yang paling kiri). Entri di bawah diagonal utama yaitu a_{21} dan a_{31} harus bernilai nol. Oleh karena itu, OBE yang digunakan adalah $-\frac{1}{4}b_1 + b_2$ dan $-\frac{1}{2}b_1 + b_3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{2}b_1+b_3]{-\frac{1}{4}b_1+b_2} |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{23}{4} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

- Lihat kolom selanjutnya yaitu kolom ke-2. Entri di bawah diagonal utama yaitu a_{32} harus bernilai nol. Oleh karena itu, OBE yang digunakan adalah $\frac{4}{11}b_2 + b_3$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{23}{4} \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{4}{11}b_2+b_3} |A| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{2} & \frac{23}{4} \\ 0 & 0 & \frac{79}{22} \end{vmatrix}$$

- Matriks *A* di atas sudah berbentuk matriks segitiga atas maka berdasarkan sifat determinan 2.2 poin c determinannya adalah:

$$\begin{aligned} |A| &= a_{11}a_{22} \dots a_{nn} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} \\ &= 4.\left(-\frac{11}{2}\right).\frac{79}{22} \\ &= -79 \end{aligned}$$

Jadi, determinan matriks *A* adalah -79

Latihan Soal 2.3

1) Jika diketahui determinan suatu matriks berordo 3×3 berikut adalah sebesar -63 maka tentukan nilai a

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 \\ 3 & a & 2a \\ 9 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab: ……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

2) Diketahui sebuah matrisk persegi berikut:

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 8 & -3 & 1 & -1 \\ 9 & -1 & 0 & -7 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Tentukan determinan matriks B menggunakan metode berikut:

a. Ekspansi Kofaktor

b. Reduksi Baris

Jawab: ………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

BAB 3

INVERS MATRIKS

Kemampuan akhir yang diharapkan:

- ✓ Mahasiswa mampu menjelaskan definisi invers matriks
- ✓ Mahasiswa mampu menjelaskan sifat-sifat invers matriks
- ✓ Mahasiswa mampu menentukan invers matriks berdasarkan adjoin matriks
- ✓ Mahasiswa mampu menghitung invers matriks dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE)

3.1. Pengertian Invers Matriks

Jika *A* dan *B* adalah matriks persegi berukuran sama sedemikian sehingga $A \times B = B \times A = I$ maka A dikatakan dapat dibalik (*invertible*) dan B adalah invers dari *A* yang dapat juga ditulis $B = A^{-1}$.

Latihan Soal 3.1.

Silahkan tuliskan kembali definisi invers matriks dengan bahasa Anda sendiri.

Jawab: ………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

3.2. Sifat-sifat Invers Matriks

Misalkan *A* adalah sebuah matriks persegi maka sifat-sifat invers matriks antara lain:

a. *A* dapat dibalik atau mempunyai invers jika determinannya tidak sama dengan nol ($|A| \neq 0$).

b. Jika *A* adalah matriks yang *invertible* maka:

   i. A^{-1} dapat dibalik dan $(A^{-1})^{-1} = A$

ii. A^n dapat dibalik dan $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ untuk $n = 0, 1, 2, ...$

iii. Untuk sebarang skalar k yang tak sama dengan nol maka kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

c. Jika *B* dan *C* keduanya merupakan invers matriks *A* maka $B = C$

d. Jika *A* dan *B* merupakan matriks-matriks yang *invertible* dan berordo sama maka *AB* dapat dibalik dan $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Latihan Soal 3.2.

1) Tentukan apakah matriks-matriks berikut bisa dibalik atau tidak.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jawab: ……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

2) Jika diketahui sebuah matriks A berordo $n \times n$ dan dapat dibalik maka buktikan bahwa A^t dapat dibalik dan $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

Jawab: ……………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

3.3. Menentukan Invers Matriks

3.2.1 Adjoin Matriks

Misalkan A adalah matriks persegi berordo $n \times n$ yang dapat dibalik maka adjoin matriks yang dinotasikan dengan adj(A) adalah transpos dari matriks kofaktor.

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \dots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}^t$$

$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \dots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

Adapun invers matriks A dapat dicari dengan cara:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$$

Contoh 3.1:

Tentukan invers matriks berikut dengan memanfaatkan determinan dan adjoin matriksnya.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Jawab:

a. Mencari $\det A$ menggunakan reduksi baris

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{4}b_1+b_3]{-\frac{1}{2}b_1+b_2} |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & \frac{13}{4} & \frac{21}{4} \end{vmatrix} \xrightarrow{\frac{13}{2}b_2+b_3}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 0 & \frac{95}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 4.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(\frac{95}{2}\right)$$

$$= -95$$

b. Mencari adj(A)

$$\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}^t$$

$$=\begin{bmatrix}(-1)^{1+1}M_{11}&(-1)^{1+2}M_{12}&(-1)^{1+3}M_{13}\\(-1)^{2+1}M_{21}&(-1)^{2+2}M_{22}&(-1)^{2+3}M_{23}\\(-1)^{3+1}M_{31}&(-1)^{3+2}M_{32}&(-1)^{3+3}M_{33}\end{bmatrix}^t$$

$$=\begin{bmatrix}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{bmatrix}^t$$

$$=\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1&6\\4&5\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&6\\1&5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\1&4\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}3&-1\\4&5\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}4&-1\\1&5\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&3\\1&4\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}3&-1\\1&6\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}4&-1\\2&6\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}4&3\\2&1\end{vmatrix}\end{bmatrix}^t$$

$$=\begin{bmatrix}-19&-4&7\\-19&21&-13\\19&-26&-2\end{bmatrix}^t$$

$$=\begin{bmatrix}-19&-19&19\\-4&21&-26\\7&-13&-2\end{bmatrix}$$

c. Mencari A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A)$$

$$=\frac{1}{(-95)}\begin{bmatrix}-19&-19&19\\-4&21&-26\\7&-13&-2\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{95}\begin{bmatrix}19&19&-19\\4&-21&26\\-7&13&2\end{bmatrix}$$

Jadi, invers A adalah $\frac{1}{95}\begin{bmatrix}19&19&-19\\4&-21&26\\-7&13&2\end{bmatrix}$

3.2.2 Operasi Baris Elementer (OBE)

Misalkan A adalah matriks persegi berordo $n\times n$ yang dapat dibalik maka urutan OBE tereduksi A terhadap matriks identitas I_n perlu dicari agar dapat dilakukan urutan OBE yang sama pada I_n untuk mendapatkan A^{-1}. Operasi-operasi baris elementer apa saja yang dapat digunakan sudah disebutkan pada subbab 2.3.3 yaitu:

a. Suatu baris dapat dikalikan dengan sebuah konstanta tak nol
b. Dua buah baris dapat dipertukarkan
c. Suatu baris dapat dikalikan dengan konstanta tak nol yang kemudian ditambahkan ke baris yang lain.

Contoh 3.2:

Tentukan invers matriks pada Contoh 3.1 menggunakan OBE.

Jawab:

OBE dilakukan pada matriks *A* yang disandingkan dengan matriks identitas *I* yaitu $[A \quad | \quad I]$ sedemikian sehingga diperoleh $[I \quad | \quad A^{-1}]$

$$[A \quad | \quad I] = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_1 \leftrightarrow b_3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & | & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[-4b_1+b_3]{-2b_1+b_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -7 & -4 & | & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -13 & -21 & | & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{7}b_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & | & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & | & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & -13 & -21 & | & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[13b_2+b_3]{-4b_2+b_1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{7} & | & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & | & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{95}{7} & | & 1 & -\frac{13}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{7}{95}b_3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{19}{7} & | & 0 & \frac{4}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & | & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{7}{95} & \frac{13}{95} & \frac{2}{95} \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{19}{7}b_3+b_1]{-\frac{4}{7}b_3+b_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{19}{95} & \frac{19}{95} & -\frac{19}{95} \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{4}{95} & -\frac{21}{95} & \frac{26}{95} \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{7}{95} & \frac{13}{95} & \frac{2}{95} \end{bmatrix}$$

$$= [I \quad | \quad A^{-1}]$$

Jadi, invers matriks *A* adalah $\begin{bmatrix} \frac{19}{95} & \frac{19}{95} & -\frac{19}{95} \\ \frac{4}{95} & -\frac{21}{95} & \frac{26}{95} \\ -\frac{7}{95} & \frac{13}{95} & \frac{2}{95} \end{bmatrix} = \frac{1}{95}\begin{bmatrix} 19 & 19 & -19 \\ 4 & -21 & 26 \\ -7 & 13 & 2 \end{bmatrix}$

Latihan Soal 3.3

1) Diketahui sebuah matrisk persegi berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 7 \\ 1 & 9 & 2 & -4 \\ 4 & 10 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Tentukan invers matriks *A* menggunakan metode berikut:

a. Adjoin Matriks

b. Operasi Baris Elementer (OBE)

Jawab: ……………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

BAB 4
SISTEM PERSAMAAN LINIER

Kemampuan akhir yang diharapkan:

- ✓ Mahasiswa mampu menjelaskan definisi sistem persamaan linier
- ✓ Mahasiswa mampu memberikan contoh sistem persamaan linier
- ✓ Mahasiswa mampu menentukan pemecahan sistem persamaan linier dengan metode eliminasi Gauss
- ✓ Mahasiswa mampu menentukan pemecahan sistem persamaan linier dengan metode eliminasi Gauss-Jordan
- ✓ Mahasiswa mampu menentukan pemecahan sistem persamaan linier dengan aturan Cramer

4.1. Pengertian Sistem Persamaan Linier

Persamaan linier dalam n variabel misalkan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ dapat didefinisikan sebagai persamaan yang dinyatakan dalam bentuk:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

dengan $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dan b adalah konstanta-konstanta riil. Adapun himpunan berhingga dari persamaan-persamaan linier disebut sistem persamaan linier atau sistem linier.

Contoh 4.1:

Contoh persamaan yang merupakan persamaan linier:

a. $x - 5y = 11$

b. $2x_1 + x_2 = 4$

c. $y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = 1$

Contoh 4.2:

Contoh persamaan yang **bukan** merupakan persamaan linier:

a. $a - 5b^2 = 11$

b. $2 \sin y + 6 = 2x$

c. $\ln 3x_1 - \sqrt{x_2} = -8$

Contoh 4.3:

Sistem persamaan linier:

a. $2x - 5y = 11$

   $x + 3y = 5$

b. $x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

   $x_1 + x_2 = 3$

c. $y_3 + y_4 + y_5 = 1$

   $y_1 + y_2 + y_3 = 16$

   $y_2 - 3y_5 = 5$

   $2y_4 - y_5 = 2$

Latihan Soal 4.1.

Silahkan tuliskan kembali definisi sistem persamaan linier dengan bahasa Anda sendiri dan berikan contohnya

Jawab: ……………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

4.2. Pemecahan Sistem Persamaan Linier

Sebuah sistem persamaan linier disebut **konsisten** jika memiliki paling sedikit satu pemecahan. Sebagai contoh, sistem persamaan linier pada Contoh 4.3a. memiliki pemecahan $x = \frac{58}{11}$ dan $y = -\frac{1}{11}$ sedangkan pemecahan sistem persamaan linier pada Contoh 4.3b adalah $x_1 = s,\ x_2 = 3 - s$ dan $x_3 = 2 - s$ untuk sebarang nilai s. Metode-metode berikut dapat digunakan untuk mencari pemecahan suatu sistem persamaan linier.

4.2.1. Eliminasi Gauss

Pada metode ini, suatu sistem persamaan linier diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk matriks yang disebut sebagai matriks yang diperbesar (*augmented matrix*). Untuk bilangan-bilangan yang tidak diketahui maka tetap harus dituliskan dalam urutan yang sama dalam masing-masing persamaan. Misalkan pada Contoh 4.3c, *augmented matrix* yang dihasilkan adalah:

$$\begin{array}{c} y_3 + y_4 + y_5 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 16 \\ y_2 - 3y_5 = 5 \\ 2y_4 - y_5 = 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} 0y_1 + 0y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 1 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 0y_4 + 0y_5 = 16 \\ 0y_1 + y_2 + 0y_3 + 0y_4 + -3y_5 = 5 \\ 0y_1 + 0y_2 + 0y_3 + 2y_4 - y_5 = 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matriks yang diperbesar tersebut kemudian diubah dalam bentuk eselon baris dengan menggunakan operasi baris elementer (OBE). Adapun matriks dalam bentuk eselon baris memiliki sifat-sifat berikut:

a. Jika entri baris tidak semuanya nol maka bilangan tak nol pertama pada baris tersebut adalah 1 yang kemudian disebut sebagai 1 utama baris tersebut.
b. Jika terdapat baris yang semua entrinya nol maka baris tersebut dikelompokkan dan ditempatkan di paling bawah matriks.

c. Untuk sebarang dua baris yang berurutan dan entri-entrinya tidak semuanya nol, 1 utama baris yang lebih rendah harus berada di posisi lebih kanan dari 1 utama baris yang lebih tinggi.

Contoh 4.4:

Contoh matriks yang berbentuk eselon baris:

a. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Contoh 4.5:

Tentukan pemecahan sistem persamaan linier pada Contoh 4.3c menggunakan metode eliminasi Gauss.

Jawab:

Misalkan *A* adalah matriks yang diperbesar yang diperoleh dari penjelasan sebelumnya. Selanjutnya, OBE dilakukan untuk memperoleh matriks *A* berbentuk eselon baris.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_1 \leftrightarrow b_2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{b_2 \leftrightarrow b_3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}b_4}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas diperoleh:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 16$$

$$y_2 - 3y_5 = 5$$

$$y_3 + y_4 + y_5 = 1$$

$$y_4 - \frac{1}{2}y_5 = 1$$

Jadi untuk sebarang nilai $y_5 = s$, diperoleh pemecahannya adalah:

$$y_1 = 11 - \frac{3}{2}s$$

$$y_2 = 5 + 3s$$

$$y_3 = -\frac{3}{2}s$$

$$y_4 = 1 + \frac{1}{2}s$$

$$y_5 = s$$

4.2.2. Eliminasi Gauss-Jordan

Perbedaan metode ini dengan metode eliminasi Gauss adalah matriks yang diperbesar direduksi menjadi matriks dalam bentuk eselon baris-tereduksi (*reduced row-echelon form*) yang sifat-sifatnya sama dengan yang telah dijelaskan pada subbab 4.2.1 dengan tambahan yaitu masing-masing kolom yang mengandung 1 utama mempunyai entri nol di tempat lainnya. Misalkan pada Contoh 4.5, jika menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan maka matriks *A* terakhir hasil OBE diteruskan sedemikian sehingga sifat tambahannya terpenuhi.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-b_4+b_3}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-b_3+b_1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 16 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-b_2+b_1}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & 11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Dari matriks di atas diperoleh:

$$y_1 + y_5 = 11$$

$$y_2 - 3y_5 = 5$$

$$y_3 + \frac{3}{2}y_5 = 0$$

$$y_4 - \frac{1}{2}y_5 = 1$$

Jadi untuk sebarang nilai $y_5 = s$, diperoleh pemecahannya adalah:

$$y_1 = 11 - \frac{3}{2}s$$

$$y_2 = 5 + 3s$$

$$y_3 = -\frac{3}{2}s$$

$$y_4 = 1 + \frac{1}{2}s$$

$$y_5 = s$$

4.2.3. Aturan *Cramer*

Jika $AX = B$ adalah sistem yang terdiri dari *n* persamaan liner dengan $\det A \neq 0$ dengan *A* adalah matriks yang entri-entrinya berupa koefisien-koefisien pada suatu sistem persamaan linier, *X* adalah matriks kolom variabelnya dan *B* adalah matriks kolom solusinya maka sistem tersebut mempunyai pemecahan yang unik yaitu:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

dengan A_j adalah matriks-matriks yang diperoleh dari penggantian entri-entri kolom *A* ke-j dengan matriks *B*.

Contoh 4.6:

Tentukan pemecahan sistem persamaan linier berikut menggunakan aturan Cramer.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Jawab:

a. $AX = B$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \\ -3x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 &= 3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad AX = B \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b. Mencari $\det A$ dengan aturan Sarrus

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1.(-3).0 + 2.1.1 + (-1).0.1) \\ &\qquad - (1.(-3).(-1) + 1.1.1 + 0.0.2) \\ &= -2 \end{aligned}$$

c. Mencari $\det A_1$ dengan aturan Sarrus

$$|A_1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (4.(-3).0 + 2.1.3 + (-1).6.1)$$
$$- (3.(-3).(-1) + 1.1.4 + 0.6.2)$$
$$= -13$$

d. Mencari $\det A_2$ dengan aturan Sarrus

$$|A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (1.6.0 + 4.1.1 + (-1).0.3) - (1.6.(-1) + 3.1.1 + 0.0.4)$$
$$= 7$$

e. Mencari $\det A_3$ dengan aturan Sarrus

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (1.(-3).3 + 2.6.1 + 4.0.1) - (1.(-3).4 + 1.6.1 + 3.0.2)$$
$$= 9$$

f. Mencari nilai x_1, x_2 dan x_3 berdasarkan aturan Cramer

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{13}{2}$$
$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = -\frac{7}{2}$$
$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = -\frac{9}{2}$$

Jadi, pemecahan sistem persamaan liniernya adalah $x_1 = \frac{13}{2}$, $x_2 = -\frac{7}{2}$ dan $x_3 = -\frac{9}{2}$.

Latihan Soal 4.2.

1) Tentukan pemecahan sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

$$p_1 + p_3 + p_5 = 6$$
$$p_2 + p_4 + p_5 = 7$$
$$p_3 - 3p_5 = 1$$
$$-2p_1 - p_4 = 4$$

Jawab: ………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………

2) Tentukan pemecahan sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan.

$$q_1 + 2q_2 + q_3 = 2$$
$$3q_1 + 5q_2 - q_3 = 4$$
$$\frac{1}{2}q_1 - 3q_2 + 2q_3 = -8$$

Jawab: ……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

3) Tentukan pemecahan sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan aturan Cramer.

$$\begin{gathered}2r_1 + 3r_2 + r_3 + 4r_4 = 1\\ 3r_1 + 2r_2 - r_3 = 6\\ 4r_1 + 1r_2 + r_3 = 2\\ 5r_1 + 4r_2 - r_3 + 4r_4 = 8\end{gathered}$$

Jawab: ……………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

DAFTAR BACAAN

Anton, Howard & Rorres, Chris. *Elementary Linear Algebra*. United States of America: Library of Congress Cataloging-in-Publication Data, 2014.

Indriati, Kumala. *Matriks, Vektor, dan Program Linier*. Jakarta: Unika Atma Jaya, 2019.

Lembang, S. T., & Natsir, I. *Aljabar Linier*. Yogyakarta: Deepublish, 2019.

Lipschutz, Seymour & Lipson, Marc. *Schaum's Outline of Theory and Problems of Linear Algebra*. Jakarta: Erlangga, 2001.

Marsudi & Marjono. *Aljabar Linear*. Malang: Universitas Brawijaya Press, 2012.

Wijayanti, I. E., Wahyuni, S., & Susanti, Y. *Dasar-Dasar Aljabar Linear dan Penggunaannya dalam Berbagai Bidang*. Yogyakarta: UGM Press, 2018.