IAIN JEMBER

# BAHAN AJAR
# (DIKTAT)

# STRUKTUR ALJABAR I

## Program Studi Tadris Matematika

FAKULTAS TARBIYAH DAN ILMU KEGURUAN
INSTITUT AGAMA ISLAM NEGERI JEMBER
2019

**BUKU AJAR (DIKTAT)**

# STRUKTUR ALJABAR I

**Oleh:**

**Mohammad Mukhlis,S.Pd.,M.Pd**

**PROGRAM STUDI TADRIS MATEMATIKA**

**FAKULTAS TARBIYAH DAN ILMU KEGURUAN**

**INSTITUTE AGAMA ISLAM NEGERI JEMBER**

**2019**

## LEMBAR PENGESAHAN

Bahan ajar ini disusun oleh:

Nama : Mohammad Mukhlis,S.Pd.,M.Pd

NIP/NUP : 201907182

NIDN : -

dan digunakan sebagai bahan ajar pada:

| | |
|---|---|
| Mata kuliah | : Struktur Aljabar I |
| Semester | : Ganjil |
| Tahun Akademik | : 2019/2020 |
| Program Studi | : Tadris Matematika |
| Fakultas | : Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan |
| Institusi | : Institut Agama Islam Negeri Jember |

disahkan pada tanggal :

Mengesahkan,
Wakil Dekan Bidang Akademik FTIK

**Dr. H. Mashudi, M.Pd**
NIP. 197209182005011003

Mengetahui,
Ketua Prodi Tadris Matematika

**Dr. H. M. Hadi Purnomo, M.Pd**
NIP. 196512011998021001

# PENGANTAR

Segala puji dan syukur penulis ucapkan kepada Allah SWT dan junjungan umat Nabi Muhammad SAW, karena dengan limpahan rahmat dan hidayahNyapenulis diberikan kesempatan untuk menyelesaikan Diktat Mata KuliahPengetahuan Peta. Diktat Mata Kuliah Struktur Aljabar I ini ditujukan sebagai pedoman bagi mahasiswa Tadris Matematika FTIK IAIN Jember ketika melaksanakanperkuliahan di kampus. Tujuan penulisan diktat kuliah ini adalah untuk memberikan pemahaman, pengetahuan, serta contoh-contoh praktis dan sederhana mengenai Struktur Aljabar. Materi yang dibahas dalam diktat mata kuliah ini yaitu (1) himpunan (2) relasi, pemetaan, sistem matematika, (3) grup, (4) subgrup, (5) grup siklis, grup permutasi.

Diktat ini disusun sebagai alternatif referensi untuk mendukung terwujudnya perkuliahan yang lebih efektif. Isi diktat mengacu pada kompetensidan satuan acara perkuliahan satu semester yang dirancang oleh dosen pengampu.Diktat ini berisi materi, beberapa bentuk dasar dari struktur aljabar dan latihan soal yang disesuaikan dengan materi yang disajikan.

Semoga bermanfaat.

Jember, 10 Juli 2019

Penulis

# DAFTAR ISI

halaman

# MODUL 1

## HIMPUNAN

Materi ini merupakan materi prasyarat yang diperlukan untuk memahami materi-materi yang ada dalam struktur Aljabar. Materi ini berisi pengertian Himpunan, sifat-sifat Aljabar dari Himpunan

## Kegiatan Belajar 1 : Pengertian Himpunan

Himpunan diartikan sebagai kumpulan dari obyek-obyek yang dapat diterangkan dengan jelas.

Himpunan dinotasikan dengan sebuah huruf capital, sedangkan keanggotaan nya dituliskan dengan huruf kecil. Misalkan $S$ sebuah himpunan dan $x$ adalah sebuah objek di $S$, dikatakan $x$ adalah anggota dari $S$, dan dinotasikan oleh $x \in S$, dalam kasus $x$ bukan anggota $S$ dinotasikan oleh $x \notin S$.

**Cara Penyajian Himpunan**

**1. *Enumerasi***

**Contoh 1.**

- Himpunan empat bilangan asli pertama: $A = \{1, 2, 3, 4\}$.
- Himpunan lima bilangan genap positif pertama: $B = \{4, 6, 8, 10\}$.
- $C$ = {kucing, $a$, Amir, 10, paku}
- $R = \{ a, b, \{a, b, c\}, \{a, c\} \}$
- $C = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$
- $K = \{ \{\} \}$
- Himpunan 100 buah bilangan asli pertama: $\{1, 2, ..., 100 \}$
- Himpunan bilangan bulat ditulis sebagai $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

**2. Keanggotaan**

$x \in A$ : $x$ merupakan anggota himpunan $A$;

$x \notin A$ : $x$ bukan merupakan anggota himpunan $A$.

**Contoh 2.**

Misalkan: $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{ a, b, \{a, b, \text{c}\}, \{a, c\} \}$

$K = \{\{\}\}$

maka

$3 \in A$

$5 \notin B$

$\{a, b, c\} \in R$

$c \notin R$

$\{\} \in K$

$\{\} \notin R$

**Contoh 3.** Bila $P_1 = \{a, b\}$, $P_2 = \{ \{a, b\} \}$, $P_3 = \{\{\{a, b\}\}\}$, maka

$a \in P_1$

$a \notin P_2$

$P_1 \in P_2$

$P_1 \notin P_3$

$P_2 \in P_3$

**3. *Simbol-simbol Baku***

**P** = himpunan bilangan bulat positif = { 1, 2, 3, ... }

**N** = himpunan bilangan alami (natural) = { 1, 2, ... }

**Z** = himpunan bilangan bulat = { ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... }

**Q** = himpunan bilangan rasional

**R** = himpunan bilangan riil

**C** = himpunan bilangan kompleks

- Himpunan yang universal: **semesta**, disimbolkan dengan U.

  Contoh: Misalkan U = {1, 2, 3, 4, 5} dan $A$ adalah himpunan bagian dari U, dengan $A = \{1, 3, 5\}$.

**4.** ***Notasi Pembentuk Himpunan***

Notasi: { $x$ | syarat yang harus dipenuhi oleh $x$ }

**Contoh 4.**

(i) $A$ adalah himpunan bilangan bulat positif yang kecil dari 5

$A$ = { $x$ | $x$ adalah bilangan bulat positif lebih kecil dari 5}

atau

$$A = \{ x \mid x \in P, x < 5 \}$$

yang ekivalen dengan $A$ = {1, 2, 3, 4}

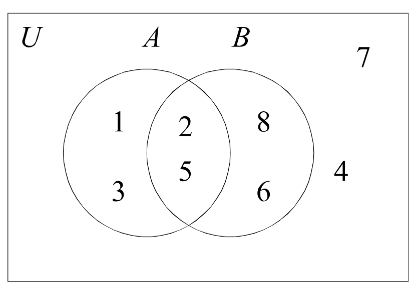
(ii) $M$ = { $x$ | $x$ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah IF2151}

**5.** ***Diagram Venn***

**Contoh 5.**

Misalkan U = {1, 2, …, 7, 8}, $A$ = {1, 2, 3, 5} dan $B$ = {2, 5, 6, 8}.

Diagram Venn:




**1.3 Kardinalitas**

- Jumlah elemen di dalam $A$ disebut kardinalitas dari himpunan $A$.
- Notasi: $n(A)$ atau $|A|$

**Contoh 6.**

(i) $B = \{ x \mid x$ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari 20 $\}$,

atau $B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ maka $|B| = 8$

(ii) $T$ = {kucing, $a$, Amir, 10, paku}, maka $|T| = 5$

(iii) $A = \{a, \{a\}, \{\{a\}\} \}$, maka $|A| = 3$

**Himpunan Kosong**

- Himpunan dengan kardinal = 0 disebut himpunan kosong (*null set*).
- Notasi : $\varnothing$ atau $\{\}$

**Contoh 7.**

(i) $E = \{ x \mid x < x \}$, maka $n(E) = 0$

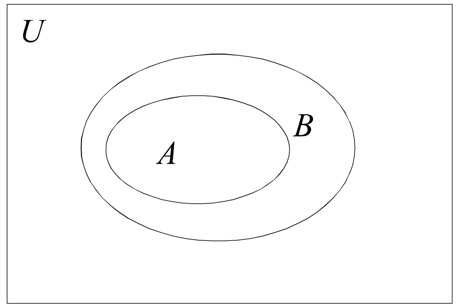
(ii) $P$ = { orang Indonesia yang pernah ke bulan }, maka $n(P) = 0$

(iii) $A = \{x \mid x$ adalah akar persamaan kuadrat $x^2 + 1 = 0 \}$, $n(A) = 0$

- himpunan $\{\{ \}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing\}$
- himpunan $\{\{ \}, \{\{ \}\}\}$ dapat juga ditulis sebagai $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $\{\varnothing\}$ bukan himpunan kosong karena ia memuat satu elemen yaitu himpunan kosong.

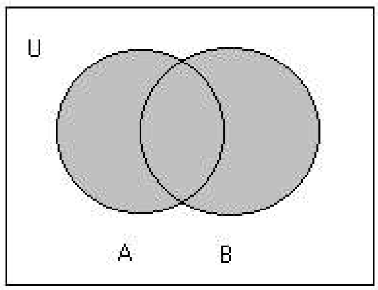
**1.4 Himpunan Bagian (*Subset*)**

- Himpunan $A$ dikatakan himpunan bagian dari himpunan $B$ jika dan hanya jika setiap elemen $A$ merupakan elemen dari $B$.
- Dalam hal ini, $B$ dikatakan *superset* dari $A$.
- Notasi: $A \subseteq B$
- Diagram Venn:




**Contoh 8.**

(i) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$




(ii) $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

(iii) $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$

(iv) Jika $A = \{ (x, y) \mid x + y < 4, x \geq, y \geq 0 \}$ dan

$B = \{ (x, y) \mid 2x + y < 4, x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \}$, maka $B \subseteq A$.

**TEOREMA 1.1**.

Untuk sembarang himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

(a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ( $\varnothing \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

- $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\varnothing$ dan $A$ disebut himpunan bagian tak sebenarnya (*improper subset*) dari himpunan $A$.

  Contoh: $A = \{1, 2, 3\}$, maka $\{1, 2, 3\}$ dan $\varnothing$ adalah *improper subset* dari $A$.

- $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$

(i) $A \subset B$ : $A$ adalah himpunan bagian dari $B$ tetapi $A \neq B$.
$A$ adalah himpunan bagian sebenarnya (*proper subset*) dari $B$.

Contoh: $\{1\}$ dan $\{2, 3\}$ adalah *proper subset* dari $\{1, 2, 3\}$

(ii) $A \subseteq B$ : digunakan untuk menyatakan bahwa $A$ adalah himpunan bagian (*subset*) dari $B$ yang memungkinkan $A = B$.

**1.5 Himpunan yang Sama**

- $A = B$ jika dan hanya jika setiap elemen $A$ merupakan elemen $B$ dan sebaliknya setiap elemen $B$ merupakan elemen $A$.

- $A = B$ jika $A$ adalah himpunan bagian dari $B$ dan $B$ adalah himpunan bagian dari $A$. Jika tidak demikian, maka $A \neq B$.

- Notasi : $A = B \leftrightarrow A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$

**Contoh 9.**

(i) Jika $A = \{ 0, 1 \}$ dan $B = \{ x \mid x (x - 1) = 0 \}$, maka $A = B$
(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{5, 3, 8 \}$, maka $A = B$
(iii) Jika $A = \{ 3, 5, 8, 5 \}$ dan $B = \{3, 8\}$, maka $A \neq B$

Untuk tiga buah himpunan, $A$, $B$, dan $C$ berlaku aksioma berikut:
(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$
(b) jika $A = B$, maka $B = A$
(c) jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

**1.6 Himpunan yang Ekivalen**

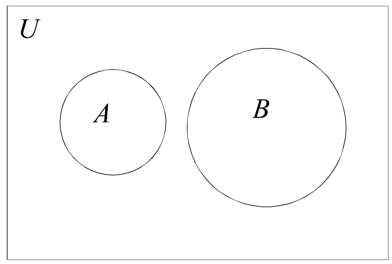
- Himpunan $A$ dikatakan ekivalen dengan himpunan $B$ jika dan hanya jika kardinalitas dari kedua himpunan tersebut sama.
- Notasi : $A \sim B \leftrightarrow |A| = |B|$

**Contoh 10.**

Misalkan $A = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$, maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

### 1.7 Himpunan Saling Lepas

- Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (*disjoint*) jika keduanya tidak memiliki elemen yang sama.
- Notasi : $A \,//\, B$
- Diagram Venn:




**Contoh 11.**

Jika $A = \{ x \mid x \in P, x < 8 \}$ dan $B = \{ 10, 20, 30, ... \}$, maka $A \,//\, B$.

### 1.8 Himpunan Kuasa

Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A adalah suatu himpunan yang elemennya merupakan semua himpunan bagian dari A, termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri.

- Notasi : $P(A)$ atau $2^A$

- Jika $|A| = m$, maka $|P(A)| = 2^m$.

**Contoh 12.**

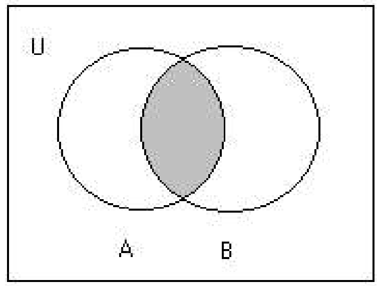
Jika $A = \{ 1, 2 \}$, maka $P(A) = \{ \varnothing, \{ 1 \}, \{ 2 \}, \{ 1, 2 \}\}$

**Contoh 13.**

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\varnothing) = \{\varnothing\}$, dan himpunan kuasa dari himpunan $\{\varnothing\}$ adalah $P(\{\varnothing\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

## 1.9 Operasi Himpunan

**a. Irisan (*intersection*)**




- Notasi : $A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \in B \}$

**Contoh 14.**

(i) Jika $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ dan $B = \{4, 10, 14, 18\}$,

maka $A \cap B = \{4, 10\}$

(ii) Jika $A = \{ 3, 5, 9 \}$ dan $B = \{ -2, 6 \}$, maka $A \cap B = \varnothing$.

Artinya: $A$ // $B$

**b. Gabungan (*union*)**

- Notasi : $A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ atau } x \in B \}$

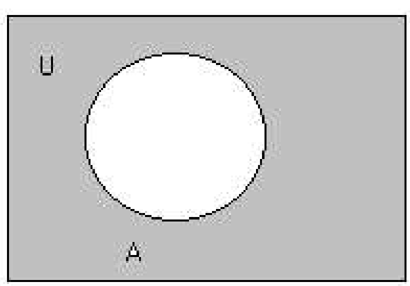
**Contoh 15.**

(i) Jika $A = \{ 2, 5, 8 \}$ dan $B = \{ 7, 5, 22 \}$, maka $A \cup B = \{ 2, 5, 7, 8, 22 \}$

(ii) $A \cup \varnothing = A$

**c. Komplemen (*complement*)**

- Notasi : $\overline{A} = \{ x \mid x \in U, x \notin A \}$



**Contoh 16.**

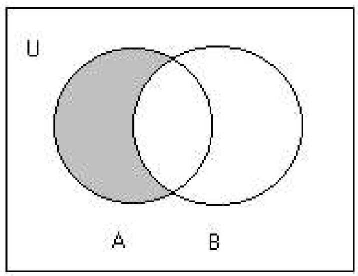
Misalkan U = { 1, 2, 3, ..., 9 },

(i) jika $A = \{1, 3, 7, 9\}$, maka $\overline{A} = \{2, 4, 6, 8\}$

**(ii)** jika $A = \{ x \mid x/2 \in P, x < 9 \}$, maka $\overline{A} = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$

**d. Selisih (*difference*)**

- Notasi : $A - B = \{ x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B \} = A \cap \overline{B}$




**Contoh 18.**

(i) Jika $A = \{ 1, 2, 3, ..., 10 \}$ dan $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$, maka $A - B = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ dan $B - A = \varnothing$

(ii) $\{1, 3, 5\} - \{1, 2, 3\} = \{5\}$, tetapi $\{1, 2, 3\} - \{1, 3, 5\} = \{2\}$

**e. Beda Setangkup (*Symmetric Difference*)**

- Notasi: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

**Contoh 19.**

Jika $A = \{ 2, 4, 6 \}$ dan $B = \{ 2, 3, 5 \}$, maka $A \oplus B = \{ 3, 4, 5, 6 \}$

**Contoh 20.** Misalkan

U = himpunan mahasiswa

$P$ = himpunan mahasiswa yang nilai ujian UTS di atas 80

$Q$ = himpunan mahasiswa yang nilain ujian UAS di atas 80

Seorang mahasiswa mendapat nilai A jika nilai UTS dan nilai UAS keduanya di atas 80, mendapat nilai B jika salah satu ujian di atas 80, dan mendapat nilai C jika kedua ujian di bawah 80.

(i) "Semua mahasiswa yang mendapat nilai A" : $P \cap Q$

(ii) “Semua mahasiswa yang mendapat nilai B” : $P \oplus Q$

(iii) “Ssemua mahasiswa yang mendapat nilai C” : U – ($P \cup Q$)

**TEOREMA 1. 2**. Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) A ⊕ B = B ⊕ A (hukum komutatif)

(b) (A ⊕ B ) ⊕ C = A ⊕ (B ⊕ C ) (hukum asosiatif)

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i$$

$$A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n = \bigoplus_{i=1}^{n} A_i$$

**Sifat-sifat Aljabar Himpunan, Prinsip Inklusi dan Eksklusi**

| | |
|---|---|
| 1. Hukum identitas:<br>– $A \cup \varnothing = A$<br>– $A \cap \text{U} = A$ | 2. Hukum *null*/dominasi:<br>– $A \cap \varnothing = \varnothing$<br>– $A \cup \text{U} = \text{U}$ |

| | |
|---|---|
| 3. Hukum komplemen:<br>– $A \cup \overline{A} = \text{U}$<br>– $A \cap \overline{A} = \varnothing$ | 4. Hukum idempoten:<br>– $A \cup A = A$<br>– $A \cap A = A$ |
| 5. Hukum involusi:<br>– $\overline{(\overline{A})} = A$ | 6. Hukum penyerapan (absorpsi):<br>– $A \cup (A \cap B) = A$<br>– $A \cap (A \cup B) = A$ |
| 7. Hukum komutatif:<br>– $A \cup B = B \cup A$<br>– $A \cap B = B \cap A$ | 8. Hukum asosiatif:<br>– $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$<br>– $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| 9. Hukum distributif:<br>– $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>– $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | 10. Hukum De Morgan:<br>– $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$<br>– $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |
| 11. Hukum 0/1<br>– $\overline{\varnothing} = \text{U}$<br>– $\overline{\text{U}} = \varnothing$ | |

Contoh 21 ;

Buktikan $A \cup B = B \cup A$

*Penyelesaian :*

Ambil : $(A \cup B)$ sebarang, akan ditunjukkan $A \cup B \quad B \cup A$

maka berdasarkan definisi Gabungan,

: $A$ atau $x \in B$ atau bias ditulis : $B$ atau : $A$ , sehingga : $(B \cup A)$ ,

Jadi $A \cup B \quad B \cup A$ .

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $B \cup A \quad A \cup B$ .

Dengan demikian maka terbukti bahwa : $A \cup B = B \cup A$

## 1.11 Prinsip Dualitas

- Prinsip dualitas: dua konsep yang berbeda dapat dipertukarkan namun tetap memberikan jawaban yang benar.
- **(Prinsip Dualitas pada Himpunan).** Misalkan $S$ adalah suatu kesamaan (*identity*) yang melibatkan himpunan dan operasi-operasi seperti $\cup$, $\cap$, dan komplemen. Jika $S^*$ diperoleh dari $S$ dengan mengganti $\cup \to \cap$, $\cap \to \cup$, $\varnothing \to$ U, U $\to \varnothing$, sedangkan komplemen dibiarkan seperti semula, maka kesamaan $S^*$ juga benar dan disebut dual dari kesamaan $S$.

| | |
|---|---|
| 1. Hukum identitas:<br>$A \cup \varnothing = A$ | Dualnya:<br>$A \cap \mathrm{U} = A$ |
| 2. Hukum *null*/dominasi:<br>$A \cap \varnothing = \varnothing$ | Dualnya:<br>$A \cup \mathrm{U} = \mathrm{U}$ |
| 3. Hukum komplemen:<br>$A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$ | Dualnya:<br>$A \cap \overline{A} = \varnothing$ |
| 4. Hukum idempoten:<br>$A \cup A = A$ | Dualnya:<br>$A \cap A = A$ |
| 5. Hukum penyerapan:<br>$A \cup (A \cap B) = A$ | Dualnya:<br>$A \cap (A \cup B) = A$ |
| 6. Hukum komutatif:<br>$A \cup B = B \cup A$ | Dualnya:<br>$A \cap B = B \cap A$ |
| 7. Hukum asosiatif:<br>$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | Dualnya:<br>$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |

| | |
|---|---|
| 8. Hukum distributif: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ | Dualnya: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| 9. Hukum De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ | Dualnya: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ |
| 10. Hukum 0/1 $\overline{\varnothing} = \mathrm{U}$ | Dualnya: $\overline{\mathrm{U}} = \varnothing$ |

Contoh 22**.** Buktikan Dual dari $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

Dengan menggunakan sifat $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap (B \cup \overline{B}) = A \cap \mathrm{U} = A$

Jadi $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$.

**1.13 Multi Set.**

Himpunan yang unsurnya boleh berulang (tidak harus berbeda) disebut multi set (himpunan ganda).

Contoh:

A = {1, 1, 1, 2, 2, 3},

B = {2, 2, 2},

C = {2, 3, 4},

D = {}.

Multiplisitas dari suatu unsur pada multi set adalah jumlah kemunculan unsur tersebut

pada multi set tersebut.

Contoh:

M = { 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 1 },

multiplisitas 1 adalah 4 dan multiplisitas 2 adalah 3, sementara itu multiplisitas 3 adalah 2.

Himpunan (set) merupakan contoh khusus dari suatu multiset, yang dalam hal ini multiplisitas dari setiap unsurnya adalah 0 atau 1. Himpunan yang multiplisitas dari unsurnya 0 adalah himpunan kosong.

Misalkan P dan Q adalah multiset, operasi yang berlaku pada dua buah multi set tersebut adalah sebagai berikut :

a. P ∪ Q merupakan suatu multiset yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas maksimum unsur tersebut pada himpunan P dan Q. Contoh :

   P = { a, a, a, c, d, d } dan Q ={ a, a, b, c, c },
   Maka P ∪ Q = { a, a, a, b, c, c, d, d }

b. P ∩ Q adalah suatu multiset yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas

   minimum unsur tersebut pada himpunan P dan Q. Contoh :
   P = { a, a, a, c, d, d } dan Q = { a, a, b, c, c }
   Maka P ∩ Q = { a, a, c }

c. P – Q adalah suatu multiset yang multiplisitas unsurnya sama dengan multiplisitas unsur tersebut pada P dikurangi multiplisitasnya pada Q, ini berlaku jika jika selisih multiplisitas tersebut adalah positif. Jika selisihnya nol atau negatif maka multiplisitas unsur tersebut adalah nol. Contoh :

   P = { a, a, a, b, b, c, d, d, e } dan Q = { a, a, b, b, b, c, c, d, d, f }
   maka P – Q = { a, e }

d. P + Q, yang didefinisikan sebagai jumlah (sum) dua buah himpunan ganda, adalah suatu multiset yang multiplisitas unsurnya sama dengan penjumlahan dari multiplisitas unsur tersebut pada P dan Q.Contoh:

   P = { a, a, b, c, c } dan Q = { a, b, b, d },
   maka P + Q = { a, a, a, b, b, b, c, c, d }

## Kegiatan Belajar 2 : **PRINSIP INKLUSI DAN EKSKLUSI**

Berkaitan dengan kardinalitas Himpunan, diperoleh beberapa rumus sebagai berikut:
Misalkan |P | menyatakan kardinalitas himpunan P, dan | Q | menyatakan kardinalitas himpunan Q, maka

$$| P \cup Q | = | P | + | Q | - | P \cap Q |$$

$$| P \cup Q | \leq | P | + | Q |$$

$$| P \cap Q | \leq \min(| P |, | Q |)$$

$$| P \oplus Q | = | P | + | Q | - 2| P \cap Q |$$

$$| P - Q | \geq | P | - | Q |$$

Untuk 3 buah himpunan hingga , maka

$$| P \cup Q \cup R | = | P | + | Q | + | R | - | P \cap Q | - | P \cap R | - | R \cap Q | + | P \cap Q \cap R |$$

Secara Umum untuk himpunan-himpunan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kita peroleh

$$| A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n | = \sum_i |A_i| - \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i \leq j \leq k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} | A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n |$$

.

Contoh 23 :

Tentukan banyaknya bilangan bulat 1 –200, yang habis dibagi 2, 5, atau 7.

Tentukan banyaknya bilangan bulat 1-200 yang habis dibagi 2,5 tetapi tidak habis dibagi 7.

Jawab :

Misalkan P = himpunan bilangan bulat 1- 200 yang habis dibagi 2

Q = himpunan bilangan bulat 1- 200 yang habis dibagi 5

R = himpunan bilangan bulat 1- 200 yang habis dibagi 7.

Maka

$$| P \cup Q \cup R | = | P | + | Q | + | R | - | P \cap Q | - | P \cap R | - | R \cap Q | + | P \cap Q \cap R |$$

$$= 100 + 40 + 28 - 20 - 14 - 5 + 2 = 131$$

Jadi banyaknya bilangan bulat 1 -200 yang habis dibagi 2, 5 atau 7 adalah 141 bilangan.

Contoh 24 :

Diantara 100 mahasiswa, 32 mempelajari matematika, 20 mempelajari fisika, 45 mempelajari biologi, 15 mempelajari matematika dan biologi, 7 mempelajari matematika dan fisika, 10 mempelajari fisika dan biologi, dan 30 tidak mempelajari satupun diantara

ketiga bidang tersebut.

a. Hitung banyaknya mahasiswa yang mempelajari ketiga bidang tersebut?
b. Hitung banyaknya mahasiswa yang mempelajari hanya satu daintara ketiga bidang tersebut?

*Penyelesaian :*

Misalakan M = himpunan mahasiswa yang mempelajari Matematika

F = himpunan mahasiswa yang mempelajari Fisika

B = himpunan mahasiswa yang mempelajari Biologi

Jadi $|M| = 32$, $|F| = 20$, $|B| = 45$, $|M \cap B| = 15$, $|M \cap F| = 7$, $|F \cap B| = 10$

$|M \cup F \cup B|^c = 30$

Dengan menggunakan Prinsip Inklusi dan Eksklusi :

$|M \cup F \cup B| = |M| + |F| + |B| - |M \cap F| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B|$

$|M \cap F \cap B| = |M \cup F \cup B| - |M| - |F| - |B| + |M \cap F| + |M \cap B| + |F \cap B|$

$= 70 - 32 - 20 - 45 + 15 + 7 + 10 = 5$

Jadi banyaknya Mahasiswa yang mempelajari ketiga bidang tersebut sebanyak 5 orang.

Banyaknya mahasiswa yang hanya mempelajari Matematika adalah ;

$|M| - |M \cap F| - |M \cap B| + |M \cap F \cap B| = 32 - 7 - 15 + 5 = 15$ orang

Banyaknya mahasiswa yang hanya mempelajari Fisika adalah :

$|F| - |M \cap F| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 20 - 7 - 10 + 5 = 8$ orang

Sedangkan banyaknya mahasiswa yang hanyamempelajari Biologi :

$|B| - |M \cap B| - |F \cap B| + |M \cap F \cap B| = 45 - 15 - 10 + 5 = 25$ orang

Jadi banyaknya mahasiswa yang mempelajari hanya satu diantara ketiga bidang tersebut adalah 48 mahasiswa.

# Latihan

1. Tentukan apakah setiap pernyataan berikut Benar atau Salah
   a. $\emptyset \subseteq \emptyset$
   b. $\emptyset \in \emptyset$
   c. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
   d. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   e. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a,b,c\}\}$
   f. $\{a, b\} \in \{a, b, c, \{a,b,c\}\}$
   g. $\{a,b\} \subseteq \{ a,b,\{a,b\}\}$
   h. $\{a,b\} \in \{ a,b,\{a,b\}\}$
   i. $\{a, \emptyset \} \subseteq \{a, \{a, \emptyset \}\}$
2. Tentukan himpunan-himpunan berikut
   a. $\emptyset \cup \{\emptyset\}$
   b. $\emptyset \cap \{\emptyset\}$
   c. $\{\emptyset\} \cup \{ a, \emptyset, \{\emptyset\}\}$
   d. $\{\emptyset\} \cap \{ a, \emptyset, \{\emptyset\}\}$
   e. $\emptyset \oplus \{ a, \emptyset, \{\emptyset\}\}$
   f. $\{\emptyset\} \oplus \{ a, \emptyset, \{\emptyset\}\}$
3. Jika $A = \{a, b, \{a,c\}, \emptyset\}$, tentukan himpunan-himpunan berikut:
   a. $A- \{a\}$
   b. $A- \emptyset$
   c. $A - \{\emptyset\}$
   d. $A - \{a, b\}$
   e. $A - \{a,c\}$
   f. $A- \{\{a,b\}\}$
   g. $A- \{a,c\}$
   h. $\{a\} - A$

i. {a,c} – A

j. {a} – {A}

4. Tentukan Power Set untuk himpunan berikut:

 a. {a}

 b. {{a}}

 c. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

5. Misalkan A= $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Periksa apakah pernyataan berikut ini Benar atau Salah

 a. $\emptyset \in \wp(A)$

 b. $\emptyset \subseteq \wp(A)$

 c. $\{\emptyset\} \subseteq \wp(A)$

 d. $\{\emptyset\} \in A$

 e. $\{\emptyset\} \in \wp(A)$

 f. $\{\emptyset\} \subseteq A$

 g. $\{\{\emptyset\}\} \in \wp(A)$

 h. $\{\{\emptyset\}\} \subseteq \wp(A)$

 i. $\{\{\emptyset\}\} \in (A)$

6. Buktikan sifat-sifat Aljabar himpunan berikut:

 *a.* $A \cup B = B \cup A$

 *b.* $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

 *c.* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

 *d.* $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

7. Tentukan Dual dari sifat berikut ;

 a. $A \cup \overline{A} = U$

 b. $A \cup \overline{A} = U$

 c. $A \cup (A \cap B) = A$

 d. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

 e. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

8. (a) jika A sub himpunan dari B dan B subhimpunan dari C , buktikan bahwa A subhimpunan dari C.

(b) Jika $B \subset A$, buktikan bahwa $A \cup B = A$

9. Diantara bilangan-bilangan bulat 1- 300, berapa banyaknya bilangan yang tidak habis dibagi 3, 5 maupun 7?
10. Berapa banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 5 maupun 7?
11. Sebuah survey diadakan terhadap 1000 orang. Ternyata 595 anggota partai demokrat, 595 memakai kaca mata, dan 550 menyukai es krim, 395 diantara mereka adalah anggota partai demokrat yang memakai kaca mata, 350 anggota partai demokrat yang menyukai es krim, dan 400 orang memakai kaca mata dan menyukai es krim, 250 diantara mereka adalah anggota partai demokrat yang memakai kaca mata dan menyukai es krim.
    a. Berapa banyak diantara mereka bukan anggota partai demokrat , tidak memakai kaca mata dan tidak menyukai es krim?
    b. Berapa banyak diantara mereka yang anggota partai demokrat namun tidak memakai kaca mata dan tidak menyukai es krim?
12. Diketahui bahwa di sebuah Universitas, 60 % diantara para dosennya bermain tenis, 50% bermain bridge, 70% melakukan jogging, 20% main tenis dan bridge, 30% main tenis dan melakukan jogging, dan 40% main bridge dan jogging. Jika seseorang meng atakan bahwa 20% diantara para dosen melakukan jogging, dan main bridge dan tenis, percayakah anda pada apa yang dikatakan itu? Mengapa?
13. Diantara 130 mahasiswa , 60 memakai topi di dalam kelas, 51 memakai syal di leher, dan 30 memakai topi dan syal. Diantara 54 mahasiswa yang memakai sweater, 26 memakai topi, 21 memakai syal dan 12 memakai topi dan syal. Mereka yang tidak memakai topi ataupun syal memakai sarung tangan.
    a. Berapa banyak mahasiswa yang memakai sarung tangan?
    b. Berapa banyak mahasiswa yang tidak memakai sweater memakai topi namun tidak memakai syal?
    c. Berapa banyak mahasiswa yang tidak memakai sweater tidak memakai topi ataupun syal?
14. Diantara 50 mahasiswa disebuah kelas, 26 memperoleh nilai A dari ujian pertama, dan 21 memperoleh A pada ujian kedua. Jika 17 mahasiswa

tidakmemperoleh A dari ujian pertama maupun ujian kedua, berapa banyak mahasiswa yang memperoleh dua kali nilai A dari kedua ujian itu?

15. ( dari soal no 15) Jika banyaknya mahasiswa yang memperoleh A dari ujian pertama sama dengan banyaknya mahasiswa yang memperoleh A dari ujian kedua, jika banyaknya mahasiswa yang memperoleh nilai A dari kedua ujian itu adalah 40, dan jika 4 mahasiswa tidak memperoleh satu pun nilai A dari dari kedua ujian itu, tentukan banyaknya mahasiswa yang memperoleh A hanya dari ujian pertama saja, yang memperoleh A hanya dari ujian kedua saja dan yang memperoleh A dari ujian pertama maupun dari ujian kedua?
16. Diketahui Himpunan ganda berikut P = { a, a, a, b, b, c, d, d, e }

    dan Q = { a, a, b, b, b, c, c, d, d, f } . Tentukan :

a. P $\cup Q$

b. $P \cap Q$

c. $P - Q$

d. $P + Q$

# DAFTAR PUSTAKA


1. Aisah. Isah,  2008 ,Matematika Diskrit, Bahan Ajar, UNPAD
2. Liu, L. C., 1985, Elements Of Discrete Mathematics, Second Edition, Mc Graw-Hill Books Company
3. Fraleigh, John, 1988. *A first Course In Abstract Algebra*,Addison Wesley Company, Canada.

# MODUL 2

# RELASI, PEMETAAN, SISTEM MATEMATIKA

Bagian ini mengakaji definisi relasi, representasi relasi, sifat-sifat relasi,pemetaan, sifat-sifat pemetaan , operasi pemetaan, dan sistem matematika.

## Kegiatan Belajar 1: Relasi

Definisi 2.1

Misalkan A dan B dua buah himpunan , maka hasil kali silang ( cross product) dari A dan B

$$A \text{ x } B = \{ (a, b) | a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Definisi 2.2

Sebuah Relasi dari *A* ke *B* adalah subhimpunan dari *A* x *B*.

**Contoh 1**

(i) Misalkan $C = \{ 1, 2, 3 \}$, dan $D = \{ a, b \}$, maka

$$C \times D = \{ (1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b) \}$$

(ii) Misalkan $A = B$ = himpunan semua bilangan riil, maka

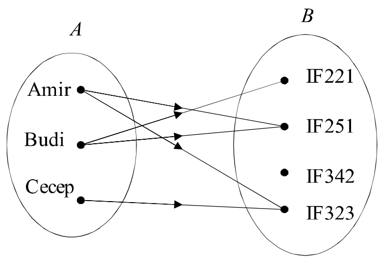
$A \times B$ = himpunan semua titik di bidang datar

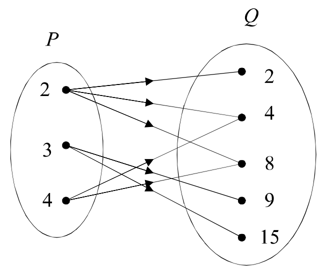
Catatan:

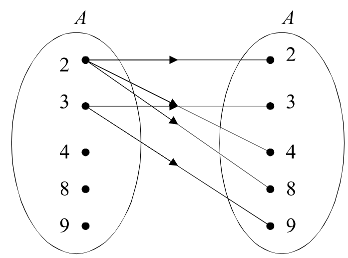
1. Jika $A$ dan $B$ merupakan himpunan berhingga, maka: $|A \times B| = |A| \,.\, |B|$.
2. Pasangan berurutan $(a, b)$ berbeda dengan $(b, a)$, dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$.
3. Perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu $A \times B \neq B \times A$ dengan syarat $A$ atau $B$ tidak kosong.
4. Jika $A = \varnothing$ atau $B = \varnothing$, maka $A \times B = B \times A = \varnothing$

**Representasi Relasi**

## 1. Representasi Relasi dengan Diagram Panah




## 2 Representasi Relasi dengan Tabel

- Kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.

**Tabel 1**

| *A* | *B* |
|---|---|
| Amir | IF251 |
| Amir | IF323 |
| Budi | IF221 |
| Budi | IF251 |
| Cecep | IF323 |

**Tabel 2**

| *P* | *Q* |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 2 | 4 |
| 4 | 4 |
| 2 | 8 |
| 4 | 8 |
| 3 | 9 |
| 3 | 15 |

**Tabel 3**

| *A* | *A* |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 2 | 4 |
| 2 | 8 |
| 3 | 3 |
| 3 | 3 |

## 3 Representasi Relasi dengan Matriks

- Misalkan $R$ adalah relasi dari $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ dan $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.
- Relasi $R$ dapat disajikan dengan matriks $M = [m_{ij}]$,

$$M = \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

yang dalam hal ini

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

Definisi 2.3

Misalkan S himpunan tak kosong. Relasi ~ pada S dikatakan bersifat :

Refleksif, apabila a~a untuk setiap a ∈ S,

Simetris, apabila a ~ b mengakibatkan b ~ a untuk setiap a, b ∈S,

Transitif, apabila a ~ b dan b~ c mengakibatkan a~ cuntuk setiap a, b, c ∈ S.

Contoh 2

Relasi keterbagian pada bilangan bulat ( disimbolkan dengan | ) dengan definisi untuk $a, b \in Z\{0\}$, $a|b$ jika dan hanya jika $b = ac$ untuk suatu $c \in Z$, mempunyai sifat refleksif dan transitif tetapi tidak bersifat simetris.

Bukti:

- Ambil sebarang $a \in Z\{0\}$. Jelas $a = a$ 1

Jadi $a|a$ sehingga | bersifat Refleksif

- Pilih 3,6 $\in Z\{0\}$, jelas 3|6 tetapi 6 tidak membagi 3.

Jadi | tidak bersifat simetris.

- Ambil sebarang a,b,c $\in Z\{0\}$ dengan $a|b \text{ dan } b|c$

Akan ditunjukkan $a|c$

Karena $a|b$ dan $b|c$ maka terdapat bilangan bulat m dan n sehingga $b = ma$ dan $c = nb$, akibatnya $c = nb=(nm)a.$

Karena terdapat bilangan bulat nm sehingga berlaku $c = (nm)a,$ maka $a|c.$

Jadi | bersifat transitif.

Definisi 2.4

Suatu Relasi pada S disebut Relasi Ekivalen, apabila memenuhi sifat refleksif, simetris dan transitif.

Contoh 3

Misalkan $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \middle| p, q \in Z, q \neq 0\right\}$. Definisikan relasi $\sim$ pada $\mathbb{Q}$ dengan aturan $\frac{p}{q} \sim \frac{m}{n}$ jika dan hanya jika $pn = mq$. Relasi $\sim$ merupakan relasi Ekivalen.

Bukti :

Misalakan $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbb{Z} ; q \neq 0\right\}$

*Penyelesaian* :

(i) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang refleksif.

Akan dibuktikan $\frac{p}{q} \sim \frac{p}{q}$

$\frac{p}{q} \sim \frac{p}{q} \Leftrightarrow pq = pq$

Jadi, "$\sim$" bersifat refleksif.

(ii) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang simetri.

Akan dibuktikan : $\frac{p}{q} \sim \frac{m}{n} \to \frac{m}{n} \sim \frac{p}{q}$

$\frac{p}{q} \sim \frac{m}{n} \Leftrightarrow pn = mq$ …….(1)

$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \Leftrightarrow mq = pn$ .......(2)

Dari (i) $pn = mq \equiv mq = pn$

$mq = pn$ adalah persamaan (2).

Jadi, "$\sim$" bersifat simetri.

(iii) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang transitif.

Akan dibuktikan : $\frac{p}{q} \sim \frac{m}{n}, \frac{m}{n} \sim \frac{s}{t} \to \frac{p}{q} \sim \frac{s}{t}$

$\frac{p}{q} \sim \frac{m}{n}$ artinya $pn = mq$……(1)

$\frac{m}{n} \sim \frac{s}{t}$ artinya $mt = sn$…….(2)

Dengan mensubstitusi $m = \frac{pn}{q}$ sehingga dari (2) diperoleh :

$\frac{pn}{q} \cdot t = sn$

$pt = sq$

$pt = sq$ artinya $\frac{p}{q} \sim \frac{s}{t}$.

Jadi, "$\sim$" bersifat transitif.

Jadi, dari (i)-(iii) maka "$\sim$" adalah relasi ekivalen.

Definisi 2.5

Misalkan S himpunan tak kosong. Partisi dari himpunan S adalah dekomposisi S ke dalam $A_i$ dengan $A_i \subset S, A_i \neq \emptyset$ sehingga berlaku $\bigcup_i A_i = S$ dan $A_i \cap A_j = \emptyset$, apabila $i \neq j$

Contoh 4

$A_1 = \{1,3\}$, $A_2 = \{4\}$ , $A_3 = \{2,5\}$ merupakan partisi dari S = ( 1,2,3,4,5}.

Definisi 2.6

Misalkan a dan b bil bulat dan n bil bulat positif, dikatakan a kongruen b modulo n (a ≡ b( mod n) jika hanya jika a – b = kn, untuk suatu k $\in Z$.

Sifat

Relasi "≡ " merupakan relasi ekivalen

Bukti : diberikan sebagai latihan

Teorema 2.7

Misalkan S himpunan tak kosong dan $\sim$ merupakan relasi ekivalen pada S. Maka $\sim$ Mengakibatkan terbentuknya partisi dan sel ( kelas ekivalen) yang memuat *a* adalah $\bar{a} = \{x \in S \mid x \sim a\}$ .

Contoh 5

$\bar{a} = \{ x \in Z \mid x \equiv a \ (mod\ n)$

$$\bar{0} = \{ x \in Z | x = 0 + kn = kn \ ; k \in Z\}$$

$$\bar{1} = \{ x \in Z | \ x = 1 + kn \ ; k \in Z\}$$

$$\bar{2} = \{ x \in Z | \ x = 2 + kn \ ; k \in Z\}$$

$$\vdots$$

$$\overline{n-1} = \{ x \in Z | \ x = (n-1) + kn \ ; k \in Z\}$$

$$\bar{n} = \{ x \in Z | \ x = n + kn \ ; k \in Z\}$$

$$= \{x \in Z | x = (k+1)n \ ; k \in Z\}$$

$$= \{ x \in Z | x = pn; p \in Z\} = \bar{0}$$

Dengan demikian terbentuk n buah kelas ekivalen yang berbeda yang merupakan partisi dari Z yaitu $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \bar{n}$

Berikut diberikan beberapa contoh penggunaan sifat Relasi .

Contoh 6.

Selidiki relasi $a|b \Leftrightarrow b = ac$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}|\{0\}$.

*Penyelesaian* :

(i) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang refleksif

Akan dibuktikan : $a|a$

Ambil $a \in \mathbb{Z}|\{0\}$ sebarang.

$a = a \cdot 1, \exists \ c = 1 \in \mathbb{Z}|\{0\}$

$a = a \cdot 1$ maka $a|a$

Jadi, relasi "$|$ " bersifat refleksif.

(ii) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang simetri

Akan dibuktikan : $a|b \to b|a$

Pilih $a = 2, b = 4$ sehingga $a|b$ menjadi $2|4$ tapi $4 \nmid 2$.

$4 \nmid 2$ karena $2 = 4 \cdot c$, tidak ada $c \in \mathbb{Z}|\{0\}$ yang memenuhi $4 \nmid 2$.

Jadi relasi "$|$ " tidak bersifat simetri.

(iii) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang transitif

Akan dibuktikan : $a|b, b|c \rightarrow a|c$

Ambil $a, b, c \in \mathbb{Z}|\{0\}$ sebarang.

$a|b \Leftrightarrow b = a \cdot n$

$b|c \Leftrightarrow c = b \cdot m$

$a|c \Leftrightarrow c = b \cdot m$

$= a \cdot n \cdot m$

$= a(nm)$

$c = a \cdot p\ ; p = nm$

$c = ap \rightarrow a|c$

Jadi, relasi "$|$ " tidak bersifat transitif.

Jadi, dari (i),(ii),(iii), relasi relasi "$|$ " bukan relasi ekivalen.

Contoh 7.

Selidiki apakah relasi $\leq$ pada $\mathbb{R}|\{0\}$ adalah relasi ekivalen.

*Penyelesaian* :

Misalkan terdapat bilangan $a, b \in \mathbb{R}|\{0\} \ni a \leq b$.

(i) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang refleksif

Akan dibuktikan : $a \leq a$

$a \leq a$

$a - a \leq 0$

$0 \leq 0$ (Benar)

Jadi, "$\leq$" bersifat refleksif.

(ii) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang simetri.

Akan dibuktikan : $a \leq b \rightarrow b \leq a$

Pilih $a = 1$ dan $b = 2$.

Sehingga didapat $1 \leq 2$ tapi $2 \nleq 1$.

Jadi, “≤” tidak bersifat simetri.

(iii) Akan diselidiki untuk sifat relasi yang transitif.

Akan dibuktikan : $a \leq b, b \leq c \rightarrow a \leq c$

$a \leq b$ artinya $a - b \leq 0, a - b \in \mathcal{P}$.....(1) (Definisi)

$b \leq c$ artinya $b - c \leq 0, b - c \in \mathcal{P}$......(2) (Definisi)

Dengan menjumlahkan (1) dan (2), diperoleh :

$(a - b) + (b - c) = a - c \in \mathcal{P}$

Jadi, $a - c \leq 0$

$a \leq c$

Jadi, “≤” bersifat transitif.

Jadi, dari (i),(ii),(iii), maka “≤” bukan relasi ekivalen.

Contoh 8

Periksa apakah relasi ${}_x\mathrm{R}_y$ di $\mathbb{R}$ adalah relasi ekivalen apabila $xy \geq 0$.

*Penyelesaian* :

(i) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang refleksif.

Akan dibuktikan : $x \cdot x \geq 0$

$x \cdot x = x^2$

$x^2 \geq 0$ (Teorema sifat urutan $\mathbb{R}$).

Jadi, ${}_x\mathrm{R}_y$ bersifat refleksif.

(ii) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang simetri.

Akan dibuktikan : ${}_x\mathrm{R}_y \rightarrow {}_y\mathrm{R}_x$

Artinya akan dibuktikan $yx \geq 0$

$xy = yx$ (Sifat komutatif $\mathbb{R}$).

Sehingga $yx \geq 0$

Jadi, ${}_x\mathrm{R}_y$ bersifat simetri.

(iii) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang transitif.

Akan dibuktikan : ${}_x\mathrm{R}_y, {}_y\mathrm{R}_z \rightarrow {}_x\mathrm{R}_z$

Artinya akan dibuktikan : $xz \geq 0$

Terdapat dua kemungkinan nilai $x, y, z$ yaitu :

(1) Dari $xy \geq 0$ dan $yz \geq 0$

Untuk $y \geq 0$ maka $x \geq 0$ dan $z \geq 0$

Karena $x \geq 0$ dan $z \geq 0$ maka $x \cdot z. = 0$ (Sifat urutan $\mathbb{R}$).

Jadi, $xz \geq 0$.

(2) Dari $xy \geq 0$ dan $yz \geq 0$

Untuk $y \leq 0$ maka $x \leq 0$ dan $z \leq 0$

Karena $x \leq 0$ dan $z \leq 0$ maka $x \cdot z \geq 0$ (Sifat urutan $\mathbb{R}$).

Jadi, $xz \geq 0$

Jadi, dari (1) dan (2) maka $xz \geq 0$.

Jadi, dari (i),(ii),(iii) ${}_x\mathrm{R}_y$ adalah relasi ekivalen.

Contoh 9

Periksa apakah relasi ${}_x\mathrm{R}_y$ di $\mathbb{Z}^+$ adalah relasi ekivalen apabila $|x| = |y|$.

*Penyelesaian* :

(i) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang refleksif.

Akan dibuktikan : $|x| = |x|$

$|x| = |x|, x \in \mathbb{Z}$

Jadi, ${}_x\mathrm{R}_y$ bersifat refleksif.

(ii) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang simetri.

Diketahui : $|x| = |y|$

Akan dibuktikan : $|y| = |x|$

$|x| = |y|$ artinya sama dengan $|y| = |x|$

Jadi, $|y| = |x|$.

Jadi, ${}_x\mathrm{R}_y$ bersifat simetri.

(iii) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang transitif.

Diketahui : $|x| = |y|, |y| = |z|$

Akan dibuktikan : $|x| = |z|$

$|x| = |y|$ artinya $|x| - |y| = 0$.......(1)

$|y| = |z|$ artinya $|y| - |z| = 0$.......(2)

Dengan menjumlahkan (1) dan (2), diperoleh :

$|x| - |y| + |y| - |z| = |x| - |z| = 0$

Karena $|x| - |z| = 0$ maka $|x| = |z|$.

Jadi, ${}_x\mathrm{R}_y$ bersifat transitif.

Jadi, dari (i)-(iii) maka ${}_x\mathrm{R}_y$ adalah relasi ekivalen.

Conoh 10

Periksa apakah relasi ${}_x\mathrm{R}_y$ di $\mathbb{Z}^+$ adalah relasi ekivalen apabila $x - y$ habis dibagi $2$.

*Penyelesaian* :

(i) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang refleksif.

Akan dibuktikan : $2|x - x$

$2|x - x$ artinya $2|0$ adalah pernyataan yang benar.

$2|0$ artinya $0 = 2 \cdot c$.

Jadi terdapat $c = 0$ yang memenuhi $0 = 2 \cdot c$

Jadi $2|x - x$.

Jadi, ${}_x\mathrm{R}_y$ bersifat refleksif.

(ii) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang simetri.

Diketahui : $2|x - y$

Akan dibuktikan : $2|y - x$

$2|y - x$ artinya $y - x = 2 \cdot d$

$y - x = 2 \cdot d$

$-(x - y) = 2 \cdot d$

$x - y = 2(-d)$ atau $x - y = 2 \cdot e$ (Hipotesis)

Jadi, $2|y-x$.

Jadi, ${}_x\mathrm{R}_y$ bersifat simetri.

(iii) Akan diperiksa untuk sifat relasi yang transitif.

Diketahui : $2|x-y$, $2|y-z$

Akan dibuktikan : $2|x-z$

$2|x-y$ artinya $x-y=2c$ ......(1)

$2|y-z$ artinya $y-z=2d$ ......(2)

Dari (2), $y-z=2d$

$(x-2c)-z=2d$ (dari (1))

$x-z=2d+2c$

$x-z=2(d+c)$

$x-z=2e \quad ; e=d+c$

Jadi, $2|x-z$

Jadi, ${}_x\mathrm{R}_y$ bersifat transitif.

Jadi, dari (i),(ii),(iii) maka ${}_x\mathrm{R}_y$ adalah relasi ekivalen.

## Kegiatan Belajar 2: Pemetaan, Sistem Matematika

Definisi 1.9

Misalkan S , T himpunan tak kosong. Sebuah pemetaan dari S ke T adalah suatu aturan yang menghubungkan setiap anggota himpunan S ke tepat satu anggota himpunan T.

Contoh 11

Misalka J adalah himpunan bilangan bulat dan S = J x J. Definisikan $\varphi : S \to J$, dengan

$$\varphi(m,n) = m+n$$

Contoh 12

Misalkan S himpunan yang terdiri dari $x_1$, $x_2$, $x_3$ , definisikan $\varphi : S \to S$ dengan $\varphi(x_1) = x_2$,

$\varphi(x_2) = x_3$ dan $\varphi(x_3) = x_1$

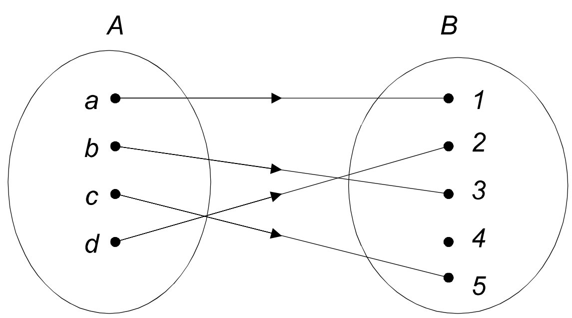
**Jenis-Jenis Pemetaan**

Definisi1.10

Pemetaan $f$dari A ke B disebut pemetaan satu-satu(injektif) jika

$f(a_1) = f(a_2)$ maka $a_1 = a_2$.

Pernyataan di atas setara dengan : Jika $a \neq a_2$ maka $f(a_1) = f(a_2)$ .




Contoh 13.

Misalkan $f$ : $\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi satu-satu?

<u>Penyelesaian</u>:

(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi satu-ke-satu, karena untuk dua $x$ yang bernilai mutlak sama tetapi tandanya berbeda nilai fungsinya sama, misalnya $f(2) = f(-2) = 5$ padahal $-2 \neq 2$.

(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi satu-ke-satu karena untuk $a \neq b$,

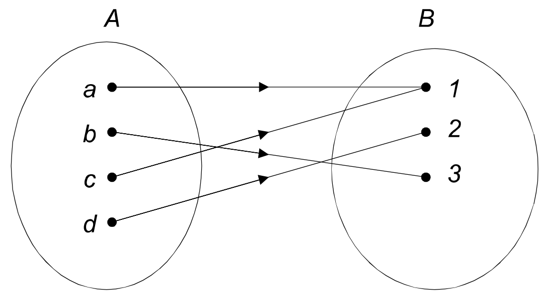
$a - 1 \neq b - 1$.

Misalnya untuk $x = 2$, $f(2) = 1$ dan untuk $x = -2$, $f(-2) = -3$.

Definisi 1.11

Pemetaan $f$dari A ke B disebut pemetaan pada(surjektif) jika untuk setiap $b \in B$ terdapat

$a \in A$ , sehingga berlaku $b = f(a)$. .




Contoh 14.
Misalkan $f : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$. Tentukan apakah $f(x) = x^2 + 1$ dan $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi pada?

Penyelesaian:
(i) $f(x) = x^2 + 1$ bukan fungsi pada, karena tidak semua nilai bilangan bulat merupakan jelajah dari $f$.

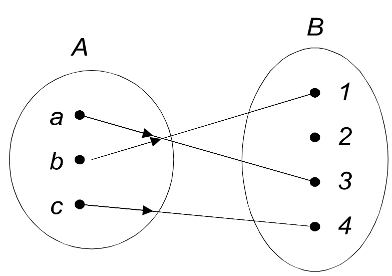
(ii) $f(x) = x - 1$ adalah fungsi pada karena untuk setiap bilangan bulat $y$, selalu ada nilai $x$ yang memenuhi, yaitu $y = x - 1$ akan dipenuhi untuk $x = y + 1$.

Definisi 1,12

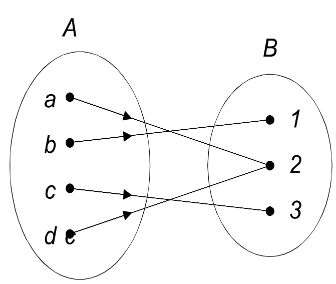
Pemetaan bijektif yaitu pemetaan yang bersifat satu-satu dan pada.

Contoh 15.
Fungsi $f(x) = x - 1$ merupakan fungsi yang berkoresponden satu-satu, karena $f$ adalah fungsi satu-satu maupun fungsi pada.

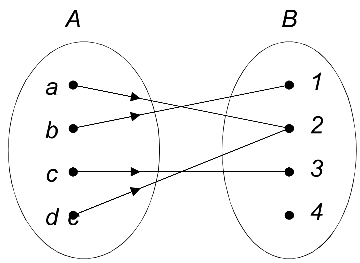
Fungsi satu-satu, bukan pada



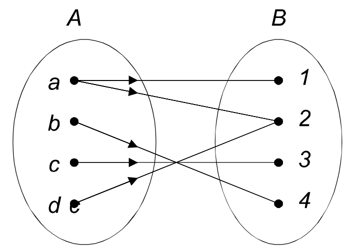

Fungsi pada, bukan satu-satu



Bukan fungsi satu-satu maupun pada




Bukan fungsi satu-satu tapi pada




1. Jika $f$ adalah fungsi berkoresponden satu-ke-satu dari $A$ ke $B$, maka kita dapat menemukan **balikan** (*invers*) dari $f$.

2. Balikan fungsi dilambangkan dengan $f^{-1}$. Misalkan $a$ adalah anggota himpunan $A$ dan $b$ adalah anggota himpunan $B$, maka $f^{-1}(b) = a$ jika $f(a) = b$.

3. Fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu sering dinamakan juga fungsi yang *invertible* (dapat dibalikkan), karena kita dapat mendefinisikan fungsi balikannya. Sebuah fungsi dikatakan *not invertible* (tidak dapat dibalikkan) jika ia bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, karena fungsi balikannya tidak ada.

Contoh 16.

Tentukan balikan fungsi $f(x) = x - 1$.

Penyelesaian:
Fungsi $f(x) = x - 1$ adalah fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, jadi balikan fungsi tersebut ada.
Misalkan $f(x) = y$, sehingga $y = x - 1$, maka $x = y + 1$. Jadi, balikan fungsi balikannya adalah $f^{-1}(y) = y + 1$.

Contoh 17**.**
Tentukan balikan fungsi $f(x) = x^2 + 1$.

Penyelesaian:
kita sudah menyimpulkan bahwa $f(x) = x^2 + 1$.
bukan fungsi yang berkoresponden satu-ke-satu, sehingga fungsi balikannya tidak ada. Jadi, $f(x) = x^2 + 1$ adalah funsgi yang *not invertible*.

**2.2.1 Komposisi dari dua buah fungsi.**

Misalkan $g$ adalah fungsi dari himpunan $A$ ke himpunan $B$, dan $f$ adalah fungsi dari himpunan $B$ ke himpunan $C$. Komposisi $f$ dan $g$, dinotasikan dengan $f \circ g$, adalah fungsi dari $A$ ke $C$ yang didefinisikan oleh

$$(f \circ g)(a) = f(g(a))$$

Contoh 18.
Diberikan fungsi

$$g = \{(1, u), (2, u), (3, v)\}$$

yang memetakan $A = \{1, 2, 3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$, dan fungsi

$$f = \{(u, y), (v, x), (w, z)\}$$

yang memetakan $B = \{u, v, w\}$ ke $C = \{x, y, z\}$. Fungsi komposisi dari $A$ ke $C$ adalah

$$f \circ g = \{(1, y), (2, y), (3, x)\}$$

**2.3 Sistem Matematika**

Definisi 1.13

Misalkan S himpunan tak kosong.

Operasi biner pada S adalah pemetaan dari S xS ke dalam S

$* : S \, x \, S \rightarrow S$

$$(a \, , b) \rightarrow a * b \, , \forall \, a, b \in S$$

Himpunan S yang dilengkapi dengan satu operasi biner disebut Sistem Matematika.

Contoh : Operasi " + " pada system bilangan real merupakan operasi biner.

Operasi " : " pada system bilangan bulat bukan merupakan operasi biner.

Contoh 19

Selidiki apakah operasi "$*$" pada $a * b = 10^{ab}$ ; $\forall \, a, b \in \mathbb{Z}^+$ merupakan operasi biner

*Penyelesaian :*

$$* : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$$

$(a, b) \to a * b = 10^{ab}$

Ambil $a, b \in \mathbb{Z}^+$ sembarang.

Maka $a * b = 10^{ab}$

Karena $a, b \in \mathbb{Z}^+$ dan perkalian dua bilangan bulat positif menghasilkan bilangan bulat positif maka $10^{ab} \in \mathbb{Z}^+$

Jadi $a * b = 10^{ab} \in \mathbb{Z}^+$

Jadi "$*$" operasi biner di $\mathbb{Z}^+$.

Contoh 20

Periksa apakah operasi biner " * "pada $a * b = a^2 + b^2$ ; $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}^+$ merupakan operasi biner.

*Penyelesaian :*

$* : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

$(a, b) \to a * b = a^2 + b^2$

Ambil $a, b \in \mathbb{Z}^+$ sembarang.

Maka $a * b = a^2 + b^2$

$a^2 = a \cdot a$ (perkalian dua bilangan bulat positif menghasilkan bilangan bulat positif) ..... (1), dan

$a^2 = a \cdot a$ (perkalian dua bilangan bulat positif menghasilkan bilangan bulat positif) ..... (2) karena (1), (2) $\in \mathbb{Z}^+$ dan penjumlahan dua bilangan bulat positif menghasilkan bilangan bulat positif, maka $a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}^+$

Jadi, $a * b = a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}^+$

Jadi, "$*$" operasi biner di $\mathbb{Z}^+$.

Contoh 21

Periksa apakah operasi * pada $a * b = a - b$ ; $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}^+$ merupakan operasi biner

*Penyelesaian :*

$* : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

$(a, b) \to a * b = a - b$

Pilih $(1,2) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Tapi $1 * 2 = 1 - 2 = -1 \notin \mathbb{Z}^+$.

Jadi, "$*$" bukan operasi biner di $\mathbb{Z}^+$.

Contoh 22

Periksa apakah operasi * pada $a * b = a + b - ab$ ; $\forall\, a, b \in \mathbb{Z}^+$ merupakan operasi biner

*Penyelesaian :*

$* :\ \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$

$(a, b) \to a * b = a + b - ab$

Pilih $(2,3) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$. Tapi $2 * 3 = 2 + 3 - (2 \cdot 3) = 5 - 6 = -1 \notin \mathbb{Z}^+$.

Jadi, "$*$" bukan operasi biner di $\mathbb{Z}^+$.

Contoh 23

Periksa apakah operasi * pada $p * q = \sqrt{p^2 + q^2}$ ; $\forall\, p, q \in \mathbb{R}$. Merupakan operasi biner

*Penyelesaian :*

$* :\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(p, q) \to p * q = \sqrt{p^2 + q^2}$

Ambil $p, q \in \mathbb{R}$ sembarang.

Maka $p * q = \sqrt{p^2 + q^2}$

$p^2 = p \cdot p$ (perkalian bilangan real menghasilkan bilangan real)....(1)

$q^2 = q \cdot q$ (perkalian bilangan real menghasilkan bilangan real)....(2)

Karena (1), (2) $\in \mathbb{R}$ dan penjumlahan dua bilangan real menghasilkan bilangan real, maka $p^2 + q^2 \in \mathbb{R}$.

Karena $p^2 + q^2 \in \mathbb{R}$ tapi akar pangkat dua dari bilangan real akan menghasilkan bilangan real positif saja.

Jadi, $\sqrt{p^2 + q^2} \in \mathbb{R}^+$ atau $\sqrt{p^2 + q^2} \notin \mathbb{R}$.

Jadi, "$*$" bukan operasi biner di $\mathbb{R}$.

Contoh 24

Periksa apakah operasi * pada $p * q = \sqrt{p^2 - q^2}$ ; $\forall\, p, q \in \mathbb{R}$, merupakan operasi biner

*Penyelesaian :*

$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(p, q) \to p * q = \sqrt{p^2 - q^2}$

Pilih $(1,2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tapi $1 * 2 = \sqrt{1^2 - 2^2} = \sqrt{1 - 4} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$.

Jadi, "$*$" bukan operasi biner di $\mathbb{R}$.

Contoh 25

Misalkan $x, y \in \mathbb{R}$ berlaku $x * y = x + y$.

a. Apakah $*$ merupakan operasi biner?

*Penyelesaian :*

$* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(x, y) \to x * y = x + y$

Ambil $x, y \in \mathbb{R}$ sembarang.

Maka $x * y = x + y$. Karena $x, y \in \mathbb{R}$ dan penjumlahan bilangan real menghasilkan bilangan real, maka $x + y \in \mathbb{R}$.

Jadi, $x * y = x + y \in \mathbb{R}$.

Jadi, $*$ operasi biner.

b. Apakah $*$ bersifat komutatif?

*Penyelesaian :*

Akan dibuktikan : $x * y = y * x$

Ambil $x, y \in \mathbb{R}$ sembarang.

$x * y = x + y = y + x = y * x$

Karena $x, y \in \mathbb{R}$ dan penjumlahan dua bilangan real menghasilkan bilangan real, maka $x + y = y + x \in \mathbb{R}$.

Jadi, $x * y = y * x$

Jadi, $*$ bersifat komutatif.

c. Apakah $*$ bersifat asosiatif?

*Penyelesaian :*

Akan dibuktikan : $x * (y * z) = (x * y) * z$

Ambil $x, y, z \in \mathbb{R}$ sembarang.

$x * (y * z) = x * (y + z) = x + (y + z) = (x + y) + z = (x * y) * z$

Karena $x, y, z \in \mathbb{R}$ dan penjumlahan dua bilangan real menghasilkan bilangan real,

maka $x + (y + z) = (x + y) + z \in \mathbb{R}$.

Jadi, $x * (y * z) = (x * y) * z$

Jadi, $*$ bersifat asosiatif.

d. Apakah $*$ memiliki unsur identitas?

*Penyelesaian :*

Akan dibuktikan : $x * e = x = e * x$

Pilih $e = 0$.

Ambil $x \in \mathbb{R}$ sembarang.

$x * e = x * 0 = x + 0 = x = 0 * x = e * x$

Jadi, $\exists\ e \in \mathbb{R}\ \forall\ x \in \mathbb{R} \ni\ x * e = x = e * x$

Jadi, $*$ memiliki unsur identitas.

e. Apakah $*$ memiliki invers?

*Penyelesaian :*

Akan dibuktikan : $x * y = e = y * x$

mbil $x, y \in \mathbb{R}$ sembarang.

Pilih $y = -x \in \mathbb{R}$

$x + y = x + (-x) = 0 = (-x) + x = y + x$

Jadi, $\forall\ x \in \mathbb{R}\ \exists\ y \in \mathbb{R} \ni x * y = e = y * x$.

Jadi, $*$ memiliki invers.

Contoh 26

Definisikan operasi $+$ pada $\mathbb{Z}_n$ dengan $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$ ; $\forall\ \bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$.

Apakah operasi $+$ merupakan operasi biner?

*Penyelesaian :*

$+: \ \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$

$(\bar{a}, \bar{b}) \to \bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

Ambil $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n$ sembarang.

Maka $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$.

$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z} | x = a + kn \,; k \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{b} = \{x \in \mathbb{Z} | x = b + kn \,; k \in \mathbb{Z}\}$

$\bar{a} + \bar{b} = a + kn + b + kn = (a+b) + 2kn$

$\quad\quad = (a+b) + m \cdot n \ ; \ m = 2k \,, k \in \mathbb{Z}$

$\bar{a} + \bar{b} = (a+b) + m \cdot n = (a+b) + k \cdot n = \overline{a+b} \in \mathbb{Z}_n$.

Jadi, $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$

Jadi, $+$ operasi biner di $\mathbb{Z}_n$.

# Latihan

Untuk soal-soal berikut, selidiki sifat relasi yang bersesuaian.

1. Relasi ≥( lebih dari atau sama dengan) pada R\{0}
2. Misalkan R relasi pada Himpunan Bilangan Bulat Positif sedemikian sehingga $aRb$ jhj $a - b$ bilangan bulat ganjil.
3. Misalkan a dan b bil bulat dan n bil bulat positif, dikatakan a kongruen b modulo n (a ≡ b( mod n) jika hanya jika a – b = kn, untuk suatu k $\in Z$.
4. Buktikan Relasi "≡ " merupakan relasi ekivalen
5. Misalkan R relasi pada Himpunan Bilangan Bulat Positif sedemikian sehingga $aRb$ jhj $a = b^2$
6. Misalkan $\varphi : S \to T$ suatu pemetaan, tentukan jenis pemetaan nya
   a. S = Himpunan bilangan Riil, T = Himpunan bilangan Riil non negative, dan $\varphi(s) = s^2$.
   b. S = Himpunan bilangan Riil non negatif, T = Himpunan bilangan Riil non negative, dan $\varphi(s) = s^2$.
   c. S = Himpunan bilangan bulat, T = Himpunan bilangan bulat, dan $\varphi(s) = s^2$.
   d. S = Himpunan bilangan bulat, T = Himpunan bilangan bulat, dan $\varphi(s) = 2s$
7. Berikan contoh pemetaan yang 1-1 tidak pada
8. Berikan contoh pemetaan pada tetapi tidak 1-1
9. Berikan contoh pemetaan 1-1 dan pada
10. Selidiki apakah operasi " $*$ " di bawah ini merupakan operasi biner untuk himpunan yang bersesuaian.

$a * b = a^2 + b^2 + 2ab \; ; \forall\, a, b \in Z^+$

$a * b = a + b - ab \; ; \forall\, a, b \in Z^+$

11. Misalkan $x, y \in R$ berlaku $x * y = x + y - xy$
    a. Apakah $*$ merupakan operasi biner?
    b. Apakah $*$ bersifat komutatif
    c. Apakah $*$ bersifat asosiatif
    d. Apakah $*$ memilik unsur identitas

# DAFTAR PUSTAKA

1. Aisah. Isah,  2008 ,Matematika Diskrit, Bahan Ajar, UNPAD
2. Liu, L. C., 1985, Elements Of Discrete Mathematics, Second Edition, Mc Graw-Hill Books Company
3. Fraleigh, John, 1988. *A first Course In Abstract Algebra*,Addison Wesley Company, Canada.
4. Herstein, I.N.,1975. *Topics inAlgebra*. John Willey & Sons,New York.

# MODUL 3

# GRUP

## Kegiatan Belajar 1 : Grup

Definisi 3.1

Sebuah Himpunan G tak kosong disebut grup terhadap operasi biner * jika terhadap operasi biner tersebut dipenuhi :

1. G tertutup terhadap operasi * yaitu untuk setiap a, b di G berlaku a*b $\in$ G
2. Setiap unsur G bersifat asosiatif yaitu $\forall$ a, b, c $\in G$ berlaku (a*b)*c = a*(b*c)
3. Terdapat unsur identitas di G sebut e, sehingga berlaku a*e = a = e* a , $\forall$ a$\in G$

$\forall$ a $\in G$, $\exists a^{-1} \in G$ sehingga berlaku a* $a^{-1}$ = e = $a^{-1}$*a, dimana $a^{-1}$ disebut invers untuk a.

Contoh-contoh :

1. Himpunan-himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, bilangan rasional $\mathbb{Q}$, bilangan riil $\mathbb{R}$ dan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ bersama-sama operasi biner penambahan merupakan grup komutatif.
2. Himpunan bilangan $\mathbb{Q} - \{0\}$ dengan operasi biner perkalian merupakan grup abelian.
3. Himpunan $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ matriks nonsingular $n \times n$ dengan operasi perkalian matriks merupakan grup tak-komutatif.
4. Himpunan matriks $n \times n$ dengan determinan sama dengan 1 $(\mathrm{SL}(n, \mathbb{R}))$ bersama-sama dengan operasi biner perkalian matriks merupakan grup tak-komutatif.
5. Misalkan $S = \{1,2, \dots, n\}$ dan $S_n$ adalah himpunan dari semua fungsi satu-satu pada$f : S \to S$. Maka $S_n$ dengan operasi komposisi fungsi merupakan suatu grup, grup ini dinamakan suatu *grup permutasi*.
6. Himpunan $\mathbb{Z}_n$ bilangan bulat modulo $n$ dengan operasi biner penambahan merupkan grup komutatif.

7. Himpunan $\mathbb{Z}_p - \{[0]\}$ bilangan bulat modulo $p$ dengan $p$ bilangan prima bersama-sama dengan operasi biner perkalian merupakan grup abelian.
8. Himpunan

   $$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | a \in \mathbb{Z} \right\}$$

   dengan operasi perkalian matriks merupakan suatu grup.
9. Himpunan $\mathbb{Z}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{Z}\}$ dengan operasi biner tambah dide_nisikan oleh $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) \stackrel{\text{def}}{=} (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ adalah suatu grup.
10. Himpunan $\{1, -1, i, -i\}$ dengan operasi perkalian adalah suatu grup $(i = \sqrt{-1})$.

Catatan : Untuk sederhananya penulisan $a * b$ cukup ditulis $ab$, penulisan suatu grup $G$ dengan operasi biner $*$ biasanya ditulis $(G, *)$ adakalanya ditulis grup Type equation here.

Contoh 2.

Periksa apakah $(\mathbb{Z}_4, +)$ merupakan grup.

Karena grupnya merupakan grup hingga, maka untuk memeriksa grup atau bukabn akan digunakan table Cayley.

| $+$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |

Dari tabel terlihat bahwa

(i) sifat tertutup terpenuhi.

(ii) Sifat asosiatif terpenuhi

(iii)Terdapat unsure identitas yaitu $\bar{0}$

(iv) Dari tabel diperoleh :

$(\bar{0})^{-1} = \bar{0}$

$(\bar{1})^{-1} = \bar{3}$

$(\bar{2})^{-1} = \bar{2}$

$(\bar{3})^{-1} = \bar{1}$

Karena aksioma grup terpenuhi, maka $(Z_4, +)$ merupakan grup

Contoh 3

$(Z_n, +)$ merupakan Grup, dengan operasi penjumlahan yang didefinisikan sebagai

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$$

Contoh 4

Periksa apakah $(\mathbb{Z}_4|\{0\}, \times)$ merupakan sebuah grup

*Penyelesaian :*

$$\mathbb{Z}_4|\{0\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$$

Dengan menggunakan tabel cayley :

| $\times$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
|---|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

(i) Dari tabel, terdapat

$\bar{0}$ $(\bar{0} = \bar{2} \times \bar{2})$ ; $\bar{0} \notin \mathbb{Z}_4|\{0\}$

Jadi, $\mathbb{Z}_4|\{\bar{0}\}$ tidak tertutup terhadap perkalian.

(ii) Dari tabel terlihat bahwa $\mathbb{Z}_4|\{\bar{0}\}$ asosiatif.

(iii) Pilih $e = \bar{1}$

Ambil $\bar{a} \in \mathbb{Z}_4|\{\bar{0}\}$ sembarang.

$\bar{a} \times e = \bar{a} \times \bar{1} = \bar{a} = \bar{1} \times \bar{a} = e \times \bar{a}$

Jadi, $\exists\, e \in \mathbb{Z}_4|\{\bar{0}\}$ $\forall\, \bar{a} \in \mathbb{Z}_4|\{\bar{0}\}$ $\ni \bar{a} \times e = \bar{a} = e \times \bar{a}$.

(iv) Pilih $\bar{a} = \bar{2} \in \mathbb{Z}_4|\{\bar{0}\}$

Karena $e = \bar{1}$ maka tidak ada $\bar{a}^{-1} \in \mathbb{Z}_4|\{\bar{0}\} \ni \bar{a} \times \bar{a}^{-1} = e$

Jadi, $\mathbb{Z}_4|\{\bar{0}\}$ tidak mempunyai unsur invers.

Jadi, dari (i)-(iv) maka $(\mathbb{Z}_4|\{0\},\times)$ bukan grup.

Contoh 5

Periksa apakah $(\mathbb{Z}_5|\{0\},\times)$ merupakan sebuah grup

*Penyelesaian :*

$\mathbb{Z}_5|\{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

Dengan menggunakan tabel cayley :

| $\times$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

(i) Dari tabel terlihat bahwa $\mathbb{Z}_5|\{\bar{0}\}$ tertutup terhadap perkalian.

(ii) Dari tabel terlihat bahwa $\mathbb{Z}_5|\{\bar{0}\}$ asosiatif.

(iii) Pilih $e = \bar{1}$

Ambil $\bar{a} \in \mathbb{Z}_5|\{\bar{0}\}$ sembarang.

$\bar{a} \times e = \bar{a} \times \bar{1} = \bar{a} = \bar{1} \times \bar{a} = e \times \bar{a}$

Jadi, $\exists\, e = \bar{1} \in \mathbb{Z}_5|\{\bar{0}\}\ \forall\, \bar{a} \in \mathbb{Z}_5|\{\bar{0}\} \ni \bar{a} \times e = \bar{a} = e \times \bar{a}$.

(iv) Dari tabel diperoleh :

$(\bar{1})^{-1} = \bar{1}$

$(\bar{2})^{-1} = \bar{3}$

$(\bar{3})^{-1} = \bar{2}$

$(\bar{4})^{-1} = \bar{4}$

Jadi, $\forall\ \bar{a} \in \mathbb{Z}_5|\{\bar{0}\} \ni\ \bar{a}^{-1} \in\ \mathbb{Z}_5|\{\bar{0}\} \ni \bar{a} \times\ \bar{a}^{-1} = e =\ \bar{a}^{-1} \times \bar{a}$

Jadi, dari (i)-(iv), maka $(\mathbb{Z}_5|\{0\},\times)$ grup.

Contoh 6.

Periksa apakah $(\mathbb{Z}_9|\{0\},\times)$

*Penyelesaian :*

$\mathbb{Z}_9|\{0\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}\}$

Dengan menggunakan tabel cayley :

| $\times$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{6}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{6}$ | $\bar{8}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{6}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{8}$ | $\bar{3}$ | $\bar{7}$ | $\bar{2}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{6}$ | $\bar{2}$ | $\bar{7}$ | $\bar{3}$ | $\bar{7}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{6}$ | $\bar{6}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{5}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{6}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{7}$ | $\bar{7}$ | $\bar{5}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{7}$ | $\bar{6}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{8}$ | $\bar{8}$ | $\bar{7}$ | $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

(i) Dari tabel terlihat bahwa $\mathbb{Z}_9|\{0\}$ tidak tertutup terhadap perkalian karena terdapat
$\bar{0}\ (\bar{0} = \bar{3} \times \bar{3})\ \bar{0} \notin \mathbb{Z}_9|\{0\}$

(ii) Dari tabel terlihat bahwa $\mathbb{Z}_9|\{0\}$ asosiatif terhadap perkalian.

(iii) Dari tabel terlihat bahwa unsur identitasnya adalah $e = \bar{1}$.

(iv) Dari tabel terlihat bahwa $\mathbb{Z}_9|\{0\}$ tidak mempunyai invers terhadap perkalian.

Jadi, dari (i)-(iv), $\mathbb{Z}_9|\{0\}$ bukan grup.

Contoh 10.

$(Z_p\backslash\{0\}, X)$ merupakan sebuah grup.

Contoh 11 :

$U_n$ adalah himpunan bilangan bulat modulo *n* yang unsur-unsurnya relative prima dengan *n.*

Misalkan $(U_4,\times)$ apakah merupakan suatu grup?

*Penyelesaian :*

Dengan menggunakan tabel cayley :

| $\times$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ |

(i) Dari tabel terlihat bahwa $(U_4,\times)$ tertutup terhadap perkalian.

(ii) Dari tabel terlihat bahwa $(U_4,\times)$ asosiatif.

(iii)Dari tabel diperoleh unsur identitas di $(U_4,\times)$ adalah $e = \bar{1}$

(iv)Dari tabel diperoleh :

$(\bar{1})^{-1} = \bar{1}$

$(\bar{3})^{-1} = \bar{3}$

Dari (i)-(iv), $(U_4,\times)$ adalah grup.

Contoh 12 :

Apakah $(U_6,\times)$ merupakansuatu Grup?

*Penyelesaian :*

Dengan menggunakan tabel cayley :

| $\times$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ |
|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ |

i. Dari tabel terlihat bahwa $(U_6, \times)$ tertutup terhadap perkalian.

ii. Dari tabel terlihat bahwa $(U_6, \times)$ asosiatif.

iii. Dari tabel diperoleh bahwa unsur identitas di $(U_6, \times)$ adalah $e = \bar{1}$

iv. Dari tabel diperoleh :

$(\bar{1})^{-1} = \bar{1}$

$(\bar{5})^{-1} = \bar{5}$

Jadi, dari (i)-(iv) $(U_6, \times)$ adalah grup.

Contoh 13.

Periksa apakah $(U_9, \times)$ merupakan suatu grup?

*Penyelesaian :*

Dengan menggunakan tabel cayley :

| $\times$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{8}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ | $\bar{7}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{8}$ | $\bar{7}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ | $\bar{5}$ |
| $\bar{5}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{7}$ | $\bar{8}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{7}$ | $\bar{7}$ | $\bar{5}$ | $\bar{1}$ | $\bar{8}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{8}$ | $\bar{8}$ | $\bar{7}$ | $\bar{5}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

(i) Dari tabel terlihat bahwa $(U_9, \times)$ tertutup terhadap perkalian.

(ii) Dari tabel terlihat bahwa $(U_9, \times)$ asosiatif.

(iii) Dari tabel terlihat bahwa unsur identitas di $(U_9, \times)$ adalah $e = \bar{1}$

(iv) Dari tabel diperoleh :

$(\bar{1})^{-1} = \bar{1}$

$(\bar{2})^{-1} = \bar{5}$

$(\bar{4})^{-1} = \bar{7}$

$(\bar{5})^{-1} = \bar{2}$

$(\bar{7})^{-1} = \bar{4}$

$(\bar{8})^{-1} = \bar{8}$

Jadi $(U_9, \times)$ merupakan sutu grup.

Contoh 14 :

$(U_n, X)$ merupakan sebuah grup

Teorema 3.2:

Diketahui (G,*) grup dan $a, b, c \in G$

(i) Jika $a * b = a * c$ maka $b = c$ (hukum kanselasi kiri)

(ii). Jika $b * a = c * a$ maka $b = c$ ( hokum kanselasi kanan)

Bukti:

(i). Misalkan $a * b = a * c$ dengan $a, b, c \in G$

Karena G grup, maka terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = e$

Diperoleh $a * b = a * c \Leftrightarrow a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$

$\Leftrightarrow (a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$

$\Leftrightarrow e * b = e * c$

$\Leftrightarrow b = c$

(ii). Misalkan $b * a = c * a$ dengan $a, b, c \in G$

Karena G grup, maka terdapat $a^{-1} \in G$ sehingga $a * a^{-1} = e$

Diperoleh $b * a = c * a \Leftrightarrow (b * a) * a^{-1} = (c * a) * a^{-1}$

$\Leftrightarrow b * (a * a^{-1}) = c * (a * a^{-1})$

$\Leftrightarrow b * e = c * e$

$\Leftrightarrow b = c$

Definisi 3.3

Sebuah Grup G disebut Grup Abelian atau Komutatif jika berlaku a*b = b*a $\forall$ a, b $\in$ G

Contoh 3

Himpunan bilangan Bulat terhadap operasi penjumlahan, Himpunan bilangan Realtanpa nol, Himpunan ($Z_n$ ,+) merupakan grup komutatif,.

Definisi 3.4

Sebuah grup disebut grup hingga jika banyaknya unsur dari grup tersebut hingga, sedangkan jika banyaknya unsure dari grup tersebut tak hingga maka grupnya merupakan grup tak hingga.

Contoh 11.

($Z_n$, + ) merupakan grup hingga, sedangkan (Z, +), (R\{0} , x) merupakan grup tak hingga.

Contoh 12

Buktikan $(G,\times)$ grup dengan :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} ; ad - bc \neq 0 \right\}$$

*Penyelesaian :*

(i) Akan ditunjukkan $G$ tertutup.

Ambil $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in G$ sembarang dengan $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ dan $ad - bc \neq 0$ dan $eh - fg \neq 0$.

Akan ditunjukkan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in G$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + hb \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Karena $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$ maka $ae + bg, af + hb, ce + dg, cf + dh \in \mathbb{R}$ berdasarkan sifat ketertutupan $\mathbb{R}$ terhadap penjumlahan dan perkalian.

Jadi, $\begin{pmatrix} ae + bg & af + hb \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \in G$

Jadi, $G$ tertutup.

(ii) Akan ditunjukkan $G$ asosiatif.

Ambil $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \in G$ sembarang dengan

$a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l \in \mathbb{R}$ dan $ad - bc \neq 0\,; eh - fg \neq 0\,; il - kj \neq 0$.

Akan ditunjukkan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix} \in G$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} ei + fk & ej + fl \\ gi + hk & jg + hl \end{pmatrix}\right] =$
$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} i & j \\ k & l \end{pmatrix}$

(Berdasarkan sifat perkalian matriks yang asosiatif).

Jadi, $G$ asosiatif.

(iii)Pilih $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Karena $1{,}0 \in \mathbb{R}$ dan $(1 \cdot 1) - (0 \cdot 0) = 1 - 0 = 1 \neq 0$ maka

$I \in G$.

Ambil $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ sembarang dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $ad - bc \neq 0$.

Akan ditunjukkan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 0 & 0 + b \\ c + 0 & 0 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Jadi,

$\exists \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\ \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Jadi, $G$ mempunyai unsur identitas.

(iv)Akan ditunjukkan $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

Ambil $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ sembarang dengan $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $ad - bc \neq 0$.

Pilih $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$. Karena $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ dan $ad - bc \neq 0$ maka

$\frac{d}{ad-bc}, \frac{-b}{ad-bc}, \frac{-c}{ad-bc}, \frac{a}{ad-bc} \in \mathbb{R}$ dan $\left(\frac{d}{ad-bc} \cdot \frac{a}{ad-bc}\right) - \left(\frac{-b}{ad-bc} \cdot \frac{-c}{ad-bc}\right) \neq 0$

sehingga $A^{-1} \in G$.

Sehingga,

$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$
$A^{-1}A$

Jadi, $\forall A \in G \; \exists A^{-1} \in G \ni AA^{-1} = I = A^{-1}A$

Jadi, $G$ mempunyai unsur invers.

Jadi, dari (i)-(iv) $(G, \times)$ grup.

## Kegiatan Belajar 2 : Sifat - sifat GRUP

Misalkan G grup maka dipenuhi :

1) Unsur identitas di G tunggal
2) Invers di G tunggal
3) $\forall$ a $\in$ G berlaku $(a^{-1})^{-1} = a$
4) $\forall$ a, b $\in$ G berlaku $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
5) Bila $a, b \in G$ maka ada dengan tunggal $x$ dan $y$ sehingga $ax = b$ dan $ya = b$.

Bukti :

1. Misalkan e dan e' identitas di G , maka $\forall$ a $\in$ G berlaku

   a* e = a = e*a dan a* e' = a = e'*a

   Jadi e= e'

2. Misalkan a' dan a" masing-masing invers dari a, sehingga a*a' = e dan a * a'' = e

   a' = e * a' =( a" * a )* a' = a" * (a * a') = a" * e = a"

   Karena a' = a" , maka dapat disimpulkan invers G adalh tunggal.
3. Misalkan e unsure identitas di G, maka untuk setiap a di G berlaku $a * a^{-1} = e$ jadi $(a^{-1})^{-1} = a$
4. Misalkan a , b unsure di G, maka $\forall$ a, b $\in$ G terdapat $a^{-1}$ dan $b^{-1}$, yang memenuhi

   $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = e$

   $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$
5. Bila $ax_0 = b$, maka$a^{-1}(ax_0) = a^{-1}b$. Sehingga didapat $x_0 = a^{-1}b$. Sebaliknya bila

   $x = a^{-1}b$, maka $ax = a(a^{-1}b)$ atau $ax = b$. Jadi persamaan $ax = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $x = a^{-1}b$. Dengan cara serupa bisa ditunjukkan bahwa $ya = b$ mempunyai penyelesaian tunggal $y = ba^{-1}$.

Contoh 13

Misalkan G grup , jika setiap unsur di G mempunyai invers dirinya sendiri, tunjukkan bahwa G merupakan Grup abelian.

Jawab:

G grup, maka untuk setiap unsur mempunyai invers dirinya sendiri maka ∀ a, b ∈ G berlaku

$a^{-1} = a$ , $b^{-1} = b$. Adt G abelian yaitu ab = ba

$ab = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$. Karena ab = ba maka perdefinisi bahwa G grup abelian.

Contoh 14

Misalkan $G$ grup abelian. Tunjukkan bahwa $(ab)^2 = a^2b^2 \ \ \forall\, a,b \in G$

*Penyelesaian :*

$G$ abelian artinya $ab = ba \ \forall\, a,b \in G$

$ab = ba$

$(ab)(ab) = ba(ab)$

$(ab)^2 = ba^2b$

$\quad\quad = a^2b^2$ (Karena $G$ abelian $ba^2 = a^2b$)

Contoh 15

Tunjukkan $G = \left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R}\right\}$ merupakan sebuah grup

*Penyelesaian :*

(i) Akan ditunjukkan $G$ tertutup.

Ambil $\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{pmatrix} \in G$ dengan $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Akan ditunjukkan $\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{pmatrix} \in G$

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2\\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2 & -\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1\cos\alpha_2\\ \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\sin\alpha_2 & -\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\alpha_1\cos\alpha_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix}$$

Karena $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ maka berdasarkan sifat ketertutupan $\mathbb{R}$, $\alpha_1 + \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Sehingga $\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} \in G$

Jadi, $G$ tertutup.

(ii) Akan ditunjukkan $G$ asosiatif

Ambil $\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 \end{pmatrix} \in G$ sembarang dengan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

Akan ditunjukkan

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 \end{pmatrix} \right] =$$
$$\left[ \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 \end{pmatrix} \right] =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} \cos\alpha_2\cos\alpha_3 - \sin\alpha_2\sin\alpha_3 & -\cos\alpha_2\sin\alpha_3 - \sin\alpha_2\cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_2\cos\alpha_3 + \cos\alpha_2\sin\alpha_3 & -\sin\alpha_2\sin\alpha_3 + \cos\alpha_2\cos\alpha_3 \end{pmatrix} \right] =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha_2 + \alpha_3) & -\sin(\alpha_2 + \alpha_3) \\ \sin(\alpha_2 + \alpha_3) & \cos(\alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) & -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) & \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_3 & -\sin\alpha_3 \\ \sin\alpha_3 & \cos\alpha_3 \end{pmatrix}$$

Jadi, $G$ asosiatif.

(iii) Pilih $\begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$

Karena $0 \in \mathbb{R}$ maka $\begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \in G$.

Ambil $\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \in G$ sembarang.

Akan ditunjukkan

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix} \in G$

Jadi, $\forall \begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix} \in G \ \exists \begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix} \in G \ \ni$
$\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}$

Jadi, $G$ mempunyai unsur identitas.

(iv) Akan ditunjukkan $G$ mempunyai invers.

Ambil $A = \begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix} \in G$ sembarang dengan $\alpha_1 \in \mathbb{R}$

Pilih $A^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}$

Karena $\alpha_1 \in \mathbb{R}$, maka $A^{-1} \in G$

Akan ditunjukkan

$AA^{-1} = \begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix}\cos^2\alpha_1 + \sin^2\alpha_1 & \cos\alpha_1\sin\alpha_1 - \sin\alpha_1\cos\alpha_1\\ \sin\alpha_1\cos\alpha_1 - \cos\alpha_1\sin\alpha_1 & \sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\\ -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1\\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1\end{pmatrix} = A^{-1}A$

Jadi, $\forall A \in G \ \exists A^{-1} \in G \ni AA^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = A^{-1}A$

Jadi, $G$ mempunyai unsur invers.

Jadi, dari (i)-(iv), $G$ grup.

# LATIHAN

1. Misalkan G grup dan untuk 3 bilangan bulat berturut-turu berlaku $(ab)^i = a^i b^i$. Buktikan bahwa G grup abelian

Sketsa bukti :

a. Misalkan 3 bilangan berturut-turut tersebut i, i+1, i+2

b. Gunakan ketiga hipotesis di atas

c. Dari poin b, tunjukkan bahwa ab=ba

1. Misalkan G grup dan berlaku $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall$ a, b $\in$ G . Buktikan bahwa G abelian.

2. Buktikan G grup abelian jika dan hanya jika $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ , $\forall\, a, b \in G$

3. Selidiki apakah ({1,-1}, x) merupakan Grup

4. Definisikan $\tau_{ab} : R \to R$ dengan $\tau_{ab}(x) = ax + b$. Misalkan G = $\{\tau_{ab} \mid a \neq 0\}$.
   Buktikan G merupakan grup terhadap komposisi fungsi.

5. Tunjukkan bahwa himpunan Z dari semua bilangan bulat adalah grup abelian
   terhadap
   operasi * yang didefinisikan oleh a * b = a + b+ 1, $\forall$ a, b $\in$ Z.

6. Periksa apakah himpunan Q dari semua bilangan Rasional kecuali 1 membentuk grup terhadap operasi * yang didefinisikan oleh a* b = a + b- ab, $\forall$ a, b $\in$ Q

7. Periksa apakah himpunan R dari semua bilangan Real membentuk grup terhadap
   operasi
   * yang didefinisikan oleh a* b = a + b+ ab, $\forall$ a, b $\in$ R.

# DAFTAR PUSTAKA


1. Fraleigh, John, 1988. *A first Course In Abstract Algebra*,Addison Wesley Company, Canada.
2. Gallian,Joseph, 2006. *Contemporary Abstract Algebra*, Houghton Mifflin Company, USA.
3. Judson,W.T, 2009.*Abstract Algebra Theory and Application*, Austin State University.
4. Herstein, I.N.,1975. *Topics in Algebra*. John Willey & Sons,New York.

# MODUL 4
# SUBGRUP

## Kegiatan Belajar 1 : SUBGRUP

Definisi 4.1

Misalkan H $\neq \emptyset$ dan H $\subseteq$ G. H disebut subgrup dari G jika H membentuk grup dibawah operasi yang sama dengan G. (Notasi H $\leq$ G).

Catatan : Untuk membuktikan H subgrup dari G, tunjukan bahwa :

1. H merupakan himpunan tak kosong
2. H merupakan himpunan bagian dari G
3. H memenuhi aksioma grup dibawah operasi biner dari G.

Contoh 1:

a. Bila $G$ suatu grup, maka $E = \{e\}$ trivial subgrup dari $G$. Sedangkan subgrup dari $G$ yang selain $E$ dan $G$ sendiri dinamakan subgrup sejati (proper subgrup).
b. Masing-masing $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ dan $\mathbb{R}$ dengan operasi biner tambah adalah subgrup dari grup himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$.
c. Himpunan $\{-1,1\}$ dan $\mathbb{Q}^{+}$ dengan operasi perkalian merupakan subgrup dari grup $\mathbb{Q}^{*} = \mathbb{Q} - \{0\}$.
d. Himpunan matriks $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ dengan operasi biner perkalian matriks adalah subgrup dari grup $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
e. Himpunan $H = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| = 1\}$ dengan operasi biner perkalian adalah subgrup dari grup $\mathbb{C}^{*}$.
f. Misalkan $n \in \mathbb{Z}$ dan $n\mathbb{Z} = \{nm | m \in \mathbb{Z}\}$ dengan operasi biner tambah $n\mathbb{Z}$ adalah subgrup dari grup $\mathbb{Z}$.

g. Himpunan $H = \left\{\frac{1}{2^m} | m \in \mathbb{Z}\right\}$ dengan operasi perkalian merupakan subgrup dari grup $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} - \{0\}$.

Sifat Subgrup

Lemma 4.1:

Misalkan H $\neq \emptyset$ dan H $\subseteq$ G, H disebut subgrup dari G, jika :

1. $\forall$a,b $\in$ H, maka ab $\in$ H
2. $\forall$ a $\in$ H, $\exists$ $a^{-1}$ $\in$ H

Lemma 4.2 :

Misalkan H $\neq \emptyset$ dan H $\subseteq$ G, H disebut subgrup dari G, jika dan hanya jika untuk setiap a,b $\in$ H berlaku $ab^{-1}$ $\in$ H.

Bukti :

($\rightarrow$) Misalkan $H < G$, didapat bila $a, b \in H$ maka $b^{-1} \in H$. Karena di $H$ berlaku juga operasi biner maka $ab^{-1} \in H$. Selanjutnya misalkan berlaku untuk sebarang $a, b \in H$ berakibat $ab^{-1} \in H$

($\leftarrow$) akan ditunjukkan $H < G$. Misalkan bahwa $a \in H$, maka dengan hipotesis didapat $e = aa^{-1} \in H$. Jadi $e \in H$ dan misalkan $g$ sebarang di $H$, maka $g^{-1} = eg^{-1} \in H$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa di $H$ berlaku suatu operasi biner yaitu $ab \in H$ untuk semua $a, b \in H$. Misalkan $a, b \in H$

berdasarkan hasil sebelumnya maka $b^{-1}$ juga di $H$. Berdasarkan hipotesis maka $ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$. Sifat assosiatif di $H$ diwarisi dari $G$ (sebab $H \subseteq G$).

Dengan demikian H merupakan subgrup dari G.

Lemma 4.3 :

H $\neq \emptyset$ , H $\subseteq$ G, H hingga dan H tertutup dibawah perkalian, maka H merupakan subgrup dari G.

Contoh 2:

Misalkan$G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R} ; ad - bc \neq 0\right\}$, $(G, \times)$ grup, dan

$$H = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G | ad \neq 0 ; a, b, d \in \mathbb{R}\right\}.$$

Buktikan $H \leq G$.

*Penyelesaian :*

(i) Akan ditunjukkan $H \neq \emptyset$

Pilih $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Karena $1 \cdot 1 = 1 \neq 0$ dan $1,0 \in \mathbb{R}$ maka $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$

Jadi, $H \neq \emptyset$.

(ii) Akan ditunjukkan $H \subseteq G$

Ambil $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H$ sembarang

Akan ditunjukkan $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G$

Karena $a, b, 0, d \in \mathbb{R}$ dan $ad - (b \cdot 0) = ad \neq 0$. Maka $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in G$

Jadi, $H \subseteq G$

(iii) Akan ditunjukkan $(H, \times)$ tertutup.

Ambil $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in H$ sembarang dengan $a, b, 0, d, c, e, f \in \mathbb{R}$ dan $ad, cf \neq 0$.

Akan ditunjukkan $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & e \\ 0 & f \end{pmatrix} \in H$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & e \\ 0 & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ae + fb \\ 0 & df \end{pmatrix}$$

Karena $a, b, c, d, e, f, 0 \in \mathbb{R}$ maka $ac, df, ae + fb \in \mathbb{R}$ dan $ac \cdot df = ad \cdot cf$ dan karena $ad \neq 0, cf \neq 0$ maka $acdf = ad \cdot cf \neq 0$.

Sehingga $\begin{pmatrix} ac & ae + fb \\ 0 & df \end{pmatrix} \in H$

(iv) Akan ditunjukkan $AA^{-1} = I = A^{-1}A$

Ambil $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in H$ dengan $a, b, 0, d \in \mathbb{R}$ dan $ad \neq 0$

Pilih $A^{-1} = \frac{1}{ad}\begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$. Karena $a, b, 0, d \in \mathbb{R}$ dan $ad \neq 0$ maka $\frac{1}{a}, \frac{-b}{ad}, \frac{1}{d} \in \mathbb{R}$ dan $\frac{1}{ad} \neq 0$. Sehingga $A^{-1} \in H$.

Sehingga,

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{-b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = A^{-1}A$$

Jadi, $\forall\, A \in H \;\exists\, A^{-1} \in H \ni AA^{-1} = I = A^{-1}A$

Jadi, dari (i)-(iv), maka $H \subseteq G$.

Sifat-sifat Subgrup.

1. Irisan dari dua buah subgrup selalu merupakan subgroup.
2. Gabungan dari dua buah subgrup belum tentu meruakan subgroup
3. JIka $\{H_\alpha\}$ adalah koleksi dari subgrup dari $G$, maka $\bigcap_\alpha H_\alpha$ juga merupakan subgrup dari $G$.

Bukti :

1. Misalkan $H_1$ dan $H_2$ subgrup. Akan ditunjukkan $H_1 \cap H_2 \leq G$.

   (i) Akan ditunjukkan $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$

   Karena $H_1, H_2 \leq G$ maka $\exists\, e \in H_1$ dan $e \in H_2$ artinya $e \in H_1 \cap H_2$

   Jadi, $H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$

   (ii) Akan ditunjukkan $H_1 \cap H_2 \subseteq G$

   Ambil $x \in H_1 \cap H_2$ sembarang. Akan ditunjukkan $x \in G$

   Karena $H_1 \leq G$ dan $H_2 \leq G$ maka $x \in G$

   Jadi, $H_1 \cap H_2 \subseteq G$

   (iii) Akan ditunjukkan $H_1 \cap H_2$ tertutup terhadap operasi di $G$

   Ambil $x, y \in H_1 \cap H_2$ sembarang.

Akan ditunjukkan $xy \in H_1 \cap H_2$.

$x \in H_1$ dan $x \in H_2$

$y \in H_1$ dan $y \in H_2$

Karena $x \in H_1, y \in H_1$ maka $xy \in H_1$

Jadi $H_1 \leq G$

Karena $x \in H_2, y \in H_2$ maka $xy \in H_2$

Jadi $H_2 \leq G$

Karena $xy \in H_1$ dan $xy \in H_2$ maka $xy \in H_1 \cap H_2$

(iv) Akan ditunjukkan $H_1 \cap H_2$ mempunyai invers.

Ambil $x \in H_1 \cap H_2$ sembarang. Akan ditunjukkan $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$

Karena $H_1 \leq G$ maka $\exists\, x^{-1} \in H_1$ dan karena $H_2 \leq G$ maka $\exists\, x^{-1} \in H_2$

Artinya $\exists\, x^{-1} \in H_1$ dan $x^{-1} \in H_2$

Artinya $\exists\, x^{-1} \in H_1 \cap H_2$

Jadi $H_1 \cap H_2$ mempunyai invers.

Jadi, dari (i)-(iv), $H_1 \cap H_2 \leq G$.

2. Untuk menyelidiki Gabungan dari 2 buah subgroup akan diberikan contohnya.
   Misalkan G = ($Z_{12}$, +) , maka subgrup-subgrup dari G adalah $H_1$ = $\{\bar{0}\}$, $H_2$ = $\{Z_{12}\}$, $H_3$ = $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \overline{10}\}$, $H_4$ = $\{\bar{0}, \bar{4}, , \bar{8}\}$, $H_5$ = $\{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, \bar{9}\}$, $H_6$ = $\{\bar{0}, \bar{4}\}$

   Maka $H_1 \cup H_2$ merupakan subgrup dari G, $H_3 \cup H_4$ merupakan subgrup dari G, tetapi $H_4 \cup H_5$ bukan merupakan subgrup.

   Jadi gabungan dari dua subgrup akan menjadi subgrup, jika subgrup yang satu termuat di subgrup yang lain nya. Sedangkan jika tidak memenuhi kondisi ini maka gabungan dua subgrup bukan merupakan subgrup.
3. <u>Bukti</u> :Misalkan $H = \bigcap_\alpha H_\alpha$ jelas bahwa $H \neq \emptyset$ sebab $e \in H$. Juga bila $a, b \in H$, maka $a, b \in H_\alpha$ untuk setiap $\alpha$ hal ini berakibat $ab^{-1} \in H_\alpha$ untuk setiap $\alpha$. Maka dari itu $ab^{-1}$ juga di $H$. Terlihat bahwa bila $a, b \in H$ berakibat bahwa $ab^{-1} \in H$, maka dari itu H adalah subgrup dari $G$.

Contoh 3 :

Diketahui $H \leq G, a \in G$. Misalkan $aHa^{-1} = \{aha^{-1} | h \in H\}$.

Buktikan $aHa^{-1}$ subgrup dari $G$.

*Penyelesaian :*

(i) Akan ditunjukkan $aHa^{-1} \neq \emptyset$

Pilih $h = e \in H$

$e = aea^{-1} \in aHa^{-1}$

$e \in aHa^{-1}$

Jadi, $aHa^{-1} \neq \emptyset$

(ii) Akan ditunjukkan $aHa^{-1} \subseteq G$

Ambil $aha^{-1} \in aHa^{-1}$ sembarang dengan $h \in H$.

Karena $h \in H, H \leq G$ maka $h \in G$.

$a \in G$ maka $\exists\ a^{-1} \in G$.

Maka $aha^{-1} \in G$ ($G$ tertutup)

Jadi, $aHa^{-1} \subseteq G$

(iii) Akan ditunjukkan $aHa^{-1}$ tertutup

Ambil $ah_1a^{-1}, ah_2a^{-1} \in aHa^{-1}$ sembarang.

Akan ditunjukkan $(ah_1a^{-1})\,(ah_2a^{-1}) \in aHa^{-1}$

$$\begin{aligned}(ah_1a^{-1})\,(ah_2a^{-1}) &= ah_1a^{-1}ah_2a^{-1} \\ &= ah_1(a^{-1}a)h_2a^{-1} \\ &= ah_1(e)h_2a^{-1} \\ &= ah_1h_2a^{-1}\end{aligned}$$

Karena $ah_1a^{-1} \in aHa^{-1}$ artinya $h_1 \in H$ dan karena $ah_2a^{-1} \in aHa^{-1}$ artinya $h_2 \in H$.

Karena $h_1, h_2 \in H$ dan $H \leq G$ maka $h_1h_2 \in H$.

Jadi, $ah_1h_2a^{-1} \in aHa^{-1}$

Jadi, $aHa^{-1}$ tertutup.

(iv) Akan ditunjukkan $aHa^{-1}$ mempunyai invers.

Ambil $aha^{-1} \in aHa^{-1}$ sembarang.

Pilih $ah^{-1}a^{-1}$

$aha^{-1} \in aHa^{-1}$ artinya $h \in H$.

Karena $h \in H$ dan $H \leq G$, maka $\exists\ h^{-1} \in H$.

Jadi $ah^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1}$

Akan ditunjukkan $(aha^{-1})(ah^{-1}a^{-1}) = e$

$$
\begin{aligned}
(aha^{-1})(ah^{-1}a^{-1}) &= aha^{-1}ah^{-1}a^{-1} \\
&= aheh^{-1}a^{-1} \\
&= ahh^{-1}a^{-1} \\
&= aea^{-1} \\
&= aa^{-1} \\
&= e
\end{aligned}
$$

Jadi, $\forall\ aha^{-1} \in aHa^{-1}\ \exists\ ah^{-1}a^{-1} \in aHa^{-1} \ni (aha^{-1})(ah^{-1}a^{-1}) = e$.

Jadi, $aHa^{-1}$ mempunyai unsur invers.

Jadi, dari (i)-(iv), maka $aHa^{-1} \leq G$.

Contoh 4 :

Misalkan $V$ himpunan bilangan real dan untuk $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$, misalkan $\tau_{ab}(x) = ax + b$. Misalkan $G = \{\tau_{ab} | a \neq 0\}$ grup terhadap operasi komposisi fungsi. $N = \{\tau_{1b} \in G\}$. Buktikan $N \leq \mathrm{G}$

*Penyelesaian :*

(i) Akan ditunjukkan $N \leq G$

a) Akan ditunjukkan $N \neq \emptyset$

Pilih $\tau_{10} \in G$ dengan $b = 0 \in \mathbb{R}$ dan $a = 1 \neq 0 \in \mathbb{R}$

Maka $\tau_{10} \in N$

Jadi, $N \neq \emptyset$

b) Akan ditunjukkan $N \subseteq G$

Ambil $\tau_{1b} \in N$ sembarang dengan $b \in \mathbb{R}$. Akan ditunjukkan $\tau_{1b} \in G$

Jelas $\tau_{1b} \in G$ (perdefinisi)

Jadi $N \subseteq G$

c) Akan ditunjukkan $N$ tertutup

Ambil $\tau_{1b}, \tau_{1c} \in N$ sembarang dengan $b, c \in \mathbb{R}$.

Akan ditunjukkan $\tau_{1b}\tau_{1c} \in N$

Ambil $x \in \mathbb{R}$ sembarang.

Maka $\tau_{1b}\tau_{1c}(x) = \tau_{1b}((1)x + c)$

$= (1)\big((1)x + c\big) + b$

$= x + c + b$

$= x + (c + b)$

$= \tau_{1(c+b)}(x)$

Maka $\tau_{1b} \circ \tau_{1c}(x) = \tau_{1(c+b)}(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$

$\tau_{1b} \circ \tau_{1c} = \tau_{1(c+b)}$

Jadi, $\tau_{1b} \circ \tau_{1c} \in N$

Jadi, $N$ tertutup.

d) Akan ditunjukkan $N$ memiliki unsur invers.

Ambil $\tau_{1b} \in N$ sembarang dengan $b \in \mathbb{R}$.

Pilih $\tau_{1(-b)}$ dengan $1 \neq 0$ dan $-b \in \mathbb{R}$.

Sehingga $\tau_{1(-b)} \in N$

Akan ditunjukkan $\tau_{1b} \circ \tau_{1(-b)} = \tau_{10} = \tau_{1(-b)} \circ \tau_{1b}$

$\tau_{1b} \circ \tau_{1(-b)} = \tau_{1b}(x - b) = 1(x - b) + b = x = \tau_{10} = \tau_{1(-b)} \circ \tau_{1b}$

Jadi, $\forall\, \tau_{1b} \in N \;\exists\; \tau_{1(-b)} \in N \ni \tau_{1b} \circ \tau_{1(-b)} = \tau_{10} = \tau_{1(-b)} \circ \tau_{1b}$

Jadi, $N$ memiliki unsur invers.

Jadi, dari (a)-(d), maka $N \leq G$.

## Kegiatan Belajar 2 : PUSAT GRUP

Definisi 4.4:

Misalkan G grup. Z(G) = $\{x \in G \mid gx = xg \quad \forall g \in G\}$ merupakan pusat Grup atau Centre Grup.

Contoh 5:

Misalkan G = (Z, +) maka Pusat grup atau Z(Z) merupakan dirinya sendiri.

Misalkan G = ($Z_4$,+ ) maka Pusat grup nya dirinya sendiri, sedangkan jika $G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} ; ad - bc \neq 0\right\}$, $(G, \times)$ grup, maka pusat grupnya adalah $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Sifat Pusat Grup

Jika G grup, maka pusat grup merupakan subgrup dari G.

Bukti :

Misalkan Z(G) = $\{x \in G \mid gx = xg \quad \forall g \in G\}$

Akan ditunjukkan $Z(G) \leq G$

1) Akan ditunjukkan $Z(G) \neq \emptyset$

   Pilih $x = e \in G$

   Karena $G$ grup, maka $ge = eg$

   Sehingga $e \in Z(G)$

   Jadi, $Z(G) \neq \emptyset$

2) Akan ditunjukkan $Z(G) \subseteq G$

   Ambil $x \in Z(G)$ sembarang. Akan ditunjukkan $x \in G$

   Jelas berdasarkan yang didefinisikan di soal bahwa $x \in G$

   Jadi, $Z(G) \subseteq G$

3) Akan ditunjukkan $Z(G)$ tertutup.

   Ambil $x, y \in Z(G)$ sembarang. Akan ditunjukkan $xy \in Z(G)$

   $x \in Z(G)$ artinya $x \in G$ dengan $gx = xg$ ,$\forall g \in G$

$y \in Z(G)$ artinya $y \in G$ dengan $gy = yg$ ,$\forall\, g \in G$

Karena $x \in G, y \in G$ dan $G$ grup maka berlaku sifat ketertutupan sehingga

$xy \in G$.

$g(xy) = (gx)y$ ,$\forall\, g \in G$

$= (xg)y$

$= x(yg)$

$= (xy)g$ ,$\forall\, g \in G$

Karena $xy \in G$ dengan $g(xy) = (xy)g, \forall\, g \in G$ maka $xy \in Z(G)$.

Jadi, $Z(G)$ tertutup.

4) Akan ditunjukkan $Z(G)$ mempunyai unsur invers.

Ambil $x \in Z(G)$ sembarang.

Pilih $x^{-1}$

Karena $x \in Z(G)$ maka $x \in G$ dengan $gx = xg$ ,$\forall\, g \in G$

Karena $x \in G$ dan $G$ grup maka $\exists\, x^{-1} \in G$

$gx = xg$

$x^{-1}gx = x^{-1}xg$

$x^{-1}gx = eg$

$x^{-1}gx = g$

$x^{-1}gxx^{-1} = gx^{-1}$

$x^{-1}ge = gx^{-1}$

$x^{-1}g = gx^{-1}$ atau $gx^{-1} = x^{-1}g$

Karena $x^{-1} \in G$ dengan $gx^{-1} = x^{-1}g$ maka $x^{-1} \in Z(G)$

Jadi, $Z(G)$ mempunyai unsur invers.

Jadi, dari (1)-(4), maka $Z(G) \leq G$

Contoh 6 :

$N(a) = \{x \in G | xa = ax\}, a \in G$ Disebut Normalizer unsur.

Buktikan $N(a)$ merupakan subgrup dari

*Penyelesaian :*

(i) Akan ditunjukkan $N(a) \neq \emptyset$

Pilih $x = e \in G$

Karena $G$ grup, maka $ea = ae$

Sehingga $e \in N(a)$

Jadi, $N(a) \neq \emptyset$

(ii) Akan ditunjukkan $N(a) \subseteq G$

Ambil $x \in N(a)$ sembarang. Akan ditunjukkan $x \in G$

$x \in N(a)$ artinya $x \in G$ dengan $xa = ax$ (sesuai yang didefinisikan)

Sehingga, diperoleh $x \in G$

Jadi, $N(a) \subseteq G$

(iii) Akan ditunjukkan $N(a)$ tertutup

Ambil $x, y \in N(a)$ sembarang. Akan ditunjukkan $xy \in N(a)$

$x \in N(a)$ artinya $x \in G$ dengan $xa = ax$

$y \in N(a)$ artinya $y \in G$ dengan $ya = ay$

Karena $x \in G, y \in G$ maka berdasarkan sifat ketertutupan didapat $xy \in G$

$$
\begin{aligned}
(xy)a &= x(ya) \\
&= x(ay) \\
&= (xa)y \\
&= (ax)y \\
&= a(xy)
\end{aligned}
$$

Karena $xy \in G$ dengan $(xy)a = a(xy)$ maka $xy \in N(a)$

Jadi, $N(a)$ tertutup.

(iv) Akan ditunjukkan $N(a)$ mempunyai invers.

Ambil $x \in N(a)$ sembarang.

Pilih $x^{-1}$

Karena $x \in N(a)$ maka $x \in G$ dengan $xa = ax$

Karena $x \in G$ maka $\exists\, x^{-1} \in G$

$xa = ax$

$x^{-1}xa = x^{-1}ax$

$ea = x^{-1}ax$

$a = x^{-1}ax$

$ax^{-1} = x^{-1}axx^{-1}$

$ax^{-1} = x^{-1}ae$

$ax^{-1} = x^{-1}a$ atau $x^{-1}a = ax^{-1}$

Karena $x^{-1} \in G$ dengan $x^{-1}a = ax^{-1}$, maka $x^{-1} \in N(a)$

Akan ditunjukkan $xx^{-1} = e$

Karena $x, x^{-1} \in N(a)$ dan $N(a)$ tertutup, maka $xx^{-1} \in N(a)$

Karena $xx^{-1} \in N(a)$ maka $xx^{-1} \in G$ dengan $xx^{-1}a = a\,xx^{-1}$

Karena $xx^{-1} = e$ dengan $xx^{-1}a = ea = a = ae = axx^{-1}$

Jadi, $\forall x \in N(a)\ \exists\ x^{-1} \in N(a) \ni xx^{-1}a = e = axx^{-1}$

Jadi, dari (i)-(iv), maka $N(a) \leq G$.

# LATIHAN

1. Tentukan Subgrup-subgrup dari
   a. ( Z, + )
   b. ($Z_6$ , + )
   c. ($Z_{11,}$ + )
   d. ($Z_{100,}$ +)
   e. ($U_6$, X )
   f. ( $U_{18}$, X)
2. Misalkan$G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{R}\,; ad - bc \neq 0\right\}$, $(G,\times)$ grup, dan

   $H = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G\right\}$.

   Buktikan $H \leq G$.

3. Misalkan G adalah grup dari semua bil kompleks tak nol terhadap operasi perkalian.

   Misalkan H = $\{a + ib \in G | a^2 + b^2 = 1\}$

   Buktikan H subgroup dari G.

4. Misalkan H subgrup dari G, $N(H) = \{a \in G | aHa^{-1} = H\},$

   Buktikan:
   a. N(H) subgrup dari G
   b. N(H) $\supset H$

5. Misalkan *H* subgroup dari *G*, centralizer dari *H* adalah

   $C(H) = \{x \in G | xh = hx \ \forall\ h \in H\}$.

   Buktikan *C(H)* subgrup dari *G*.

6. Misalkan H subgrup dari G, dan $a \in G$, misalkan $aHa^{-1} = \{ aha^{-1} | h \in H\}$

   subgrup dari G.

   Jika H hingga apakah order $aHa^{-1}$?

# DAFTAR PUSTAKA


1. Fraleigh, John, 1988. *A first Course In Abstract Algebra*,Addison Wesley Company, Canada.
2. Gallian,Joseph, 2006. *Contemporary Abstract Algebra*, Houghton Mifflin Company, USA.
3. Judson,W.T, 2009.*Abstract Algebra Theory and Application*, Austin State University.
4. Herstein, I.N.,1975. *Topics in Algebra*. John Willey & Sons,New York.
5. Isnarto, 2002, *Struktur Aljabar*, Bahan Ajar,Universitas Negeri Semarang