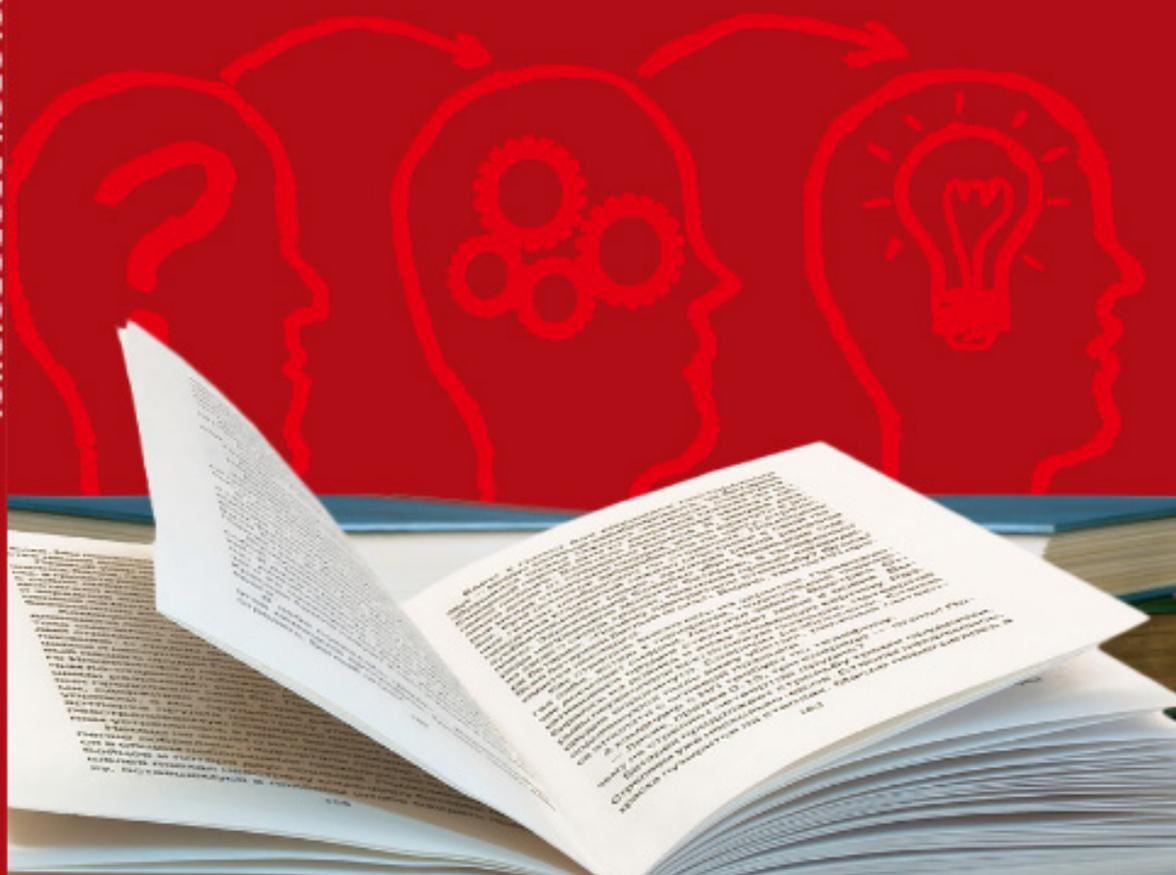


Dr. Indah Wahyuni, M.Pd.

PENALARAN PROPORSIONAL



PENALARAN PROPORSIONAL

Sanksi Pelanggaran Pasal 113 Undang-Undang Nomor 28 tahun 2014 tentang Hak Cipta, sebagaimana yang telah diatur dan diubah dari Undang-Undang Nomor 19 Tahun 2002, bahwa:

Kutipan Pasal 113

1. Setiap Orang yang dengan tanpa hak melakukan pelanggaran hak ekonomi sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf i untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 1 (satu) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp100.000.000 (seratus juta rupiah).
2. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf c, huruf d, huruf f, dan/atau huruf h untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 3 (tiga) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp500.000.000,00 (lima ratus juta rupiah).
3. Setiap Orang yang dengan tanpa hak dan/atau tanpa izin Pencipta atau pemegang Hak Cipta melakukan pelanggaran hak ekonomi Pencipta sebagaimana dimaksud dalam Pasal 9 ayat (1) huruf a, huruf b, huruf e, dan/atau huruf g untuk Penggunaan Secara Komersial dipidana dengan pidana penjara paling lama 4 (empat) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp1.000.000.000,00 (satu miliar rupiah).
4. Setiap Orang yang memenuhi unsur sebagaimana dimaksud pada ayat (3) yang dilakukan dalam bentuk pembajakan, dipidana dengan pidana penjara paling lama 10 (sepuluh) tahun dan/atau pidana denda paling banyak Rp4.000.000.000,00 (empat miliar rupiah).

PENALARAN PROPORSIONAL

Dr. Indah Wahyuni, M.Pd.



LADANG KATA

PENALARAN PROPORSIONAL

©2022, Dr. Indah Wahyuni, M.Pd.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

viii + 64 halaman; 15,5 cm x 23 cm

Cetakan Pertama, Agustus 2022

ISBN: 978-623-138-007-4

Penulis : Dr. Indah Wahyuni, M.Pd.

Editor : Dr. Hj. Umi Farihah, M.M., M.Pd

Tata Letak Isi : Rasyid Hidayat

Desain Sampul : Ahmad Hanin Lathif

Diterbitkan oleh:

Lembaga Ladang Kata

Jl. Garuda, Gang Panji 1, No. 335

RT 7 RW 40 Kampung Kepanjen, Banguntapan, Bantul

Email: cetakbukudiladangkata@gmail.com

Instagram: [@cetakbuku.ladangkata](https://www.instagram.com/cetakbuku.ladangkata)

www.cetakbukumurah.id

KATA PENGANTAR

Kemampuan penalaran proporsional adalah kemampuan yang penting dimiliki oleh siswa dalam pembelajaran matematika. Penalaran proporsional merupakan suatu kemampuan berpikir yang sangat penting dimiliki oleh seorang siswa dalam pembelajaran matematika. Dengan kemampuan penalaran proporsional, dapat membantu siswa dalam menyelesaikan soal maupun masalah yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu hadirnya buku yang berjudul “Penalaran Proporsional” telah mengungkap proses berpikir dalam matematika yang mempunyai karakteristik pola berfikir yang logis bersifat analitis. Penalaran proporsional siswa tidak hanya aktifitas berpikir dalam menarik kesimpulan, tetapi dibutuhkan pemahaman analitis dan kemampuan pemecahan masalah yang tinggi dengan menggunakan strategi penjumlahan, perkalian dalam mencapai pengoperasian soal aritmatika social. Semoga Buku **penalaran proporsional** ini bermanfaat guna menambah wawasan para siswa, mahasiswa dan khalayak umum.

Jember, Agustus 2022

Penulis

Dr. Indah Wahyuni, M.Pd

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI.....	vi
BAB 1 PENGERTIAN PENALARAN	1
A. Penalaran.....	1
B. Penalaran Matematika.....	5
BAB 2 PENALARAN PROPORSIONAL.....	7
A. Penalaran Proporsional.....	7
B. Masalah Proporsi	8
C. Masalah Multiplikatif	12
D. Masalah Multiplikatif Konteks Beragam	14
BAB 3 KEMAMPUAN PENALARAN PROPORSIONAL.....	20
A. Kemampuan Penalaran Proporsional	20
B. Indikator Penalaran Proporsional	25
BAB 4 STRATEGI MENYELESAIKAN MASALAH PROPORSI	30
A. Strategi menyelesaikan masalah Proporsi	30
B. Hubungan antara strategi dalam menyelesaikan masalah proporsi dengan penalaran proporsional.....	35

BAB 5 LEVEL PENALARAN PROPORSIONAL	36
A. Level Penalaran Proporsional Menurut Rahma Johar .	36
B. Level Penalaran Proporsional Menurut Langrall dan Swafford	38
 BAB 6 PENALARAN PROPORSIONAL MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MULTIPLIKATIF KONTEKS BERAGAM BERDASARKAN TEORI APOS.....	 41
A. Penalaran Proporsional pada Tahap Aksi.....	42
B. Penalaran proporsional pada Tahap Proses	45
C. Penalaran Proporsional pada Tahap Objek	55
D. Penalaran Proporsional pada Tahap Skema	56
 DAFTAR RUJUKAN	 59

BAB 1

PENGERTIAN PENALARAN

A. Penalaran

Menurut kamus besar bahasa Indonesia, nalar diartikan pertimbangan tentang baik dan buruk; aktivitas yang memungkinkan seseorang berpikir logis. Sedangkan penalaran diartikan sebagai (perihal) menggunakan nalar; proses mental dalam mengembangkan pikiran dari beberapa fakta atau prinsip. Sedangkan menurut Depdiknas (2008:950), penalaran adalah “cara (perihal) menggunakan nalar, pemikiran atau cara berpikir logis, proses mental dalam mengembangkan pikiran dari beberapa fakta atau prinsip”. Sedangkan Ilmiah (2007:7) berpendapat bahwa penalaran merupakan cara berikir spesifik untuk menarik kesimpulan dari premis-premis yang ada. Sehingga tidak semua berpikir adalah bernalar. Kegiatan berpikir yang bukan bernalar misalnya mengingat-ingat sesuatu atau melamun.

Litner (2008:257) menyatakan bahwa penalaran adalah jalan pemikiran untuk menghasilkan pernyataan-pernyataan dan kesimpulan pada penyelesaian tugas. Dalam hal ini yang termasuk dikategorikan sebagai tugas adalah hampir semua pekerjaan siswa diantaranya latihan, tes, kerja kelompok dan lain-lain. Menurut Harel (dalam Harel dan Sowder, 2005:40) siswa berlatih bernalar dengan menggunakan cara berpikir yang khusus dan pemahamn. Penalaran merupakan kegiatan berpikir yang memiliki karakteristik tertentu untuk menemukan kebenaran. Yang dimaksud karakteristik tertentu adalah pola pikir yang logis dan proses berpikir yang analitis. Pola iker yang logis berarti

menggunakan logika tertentu. Hal ini karena pada setiap penalaran pasti berasal dari logika tertentu yang bersumber dari fakta atau prinsip yang ada. Sedangkan sifat analitis dari penalaran merupakan akibat dari berpikir logis yang memperhatikan fakta-fakta dan prinsip.

Berdasarkan pendapat di atas maka yang dimaksud dengan penalaran adalah proses berpikir untuk menghasilkan pernyataan-pernyataan dan kesimpulan pada penyelesaian tugas.

Johar (2006:21) berpendapat bahwa penalaran sebagai suatu kegiatan berpikir memiliki ciri-ciri sebagai berikut:

1. Adanya suatu pola berpikir yang secara luas dapat disebut logika

Logika adalah sistem berpikir formal yang didalamnya terdapat seperangkat aturan untuk menarik kesimpulan. Dapat dikatakan bahwa tiap bentuk penalaran mempunyai logikanya sendiri. Atau dapat juga disimpulkan bahwa kegiatan penalaran merupakan suatu proses berpikir logis, sedangkan berpikir logis diartikan sebagai kegiatan berpikir menurut suatu pola tertentu atau menurut logika tertentu.

2. Sifat analitik pada proses berpikirnya

Penalaran merupakan suatu kegiatan analisis yang mempergunakan logika ilmiah. Analisis sendiri pada hakekatnya merupakan suatu kegiatan berpikir berdasarkan langkah-langkah tertentu. Secara garis besar penalaran dapat dibedakan menjadi dua, yaitu:

- a) Penalaran Induktif

Penalaran induktif diartikan sebagai proses berpikir untuk menarik kesimpulan dari hal-hal spesifik menuju hal-hal umum.

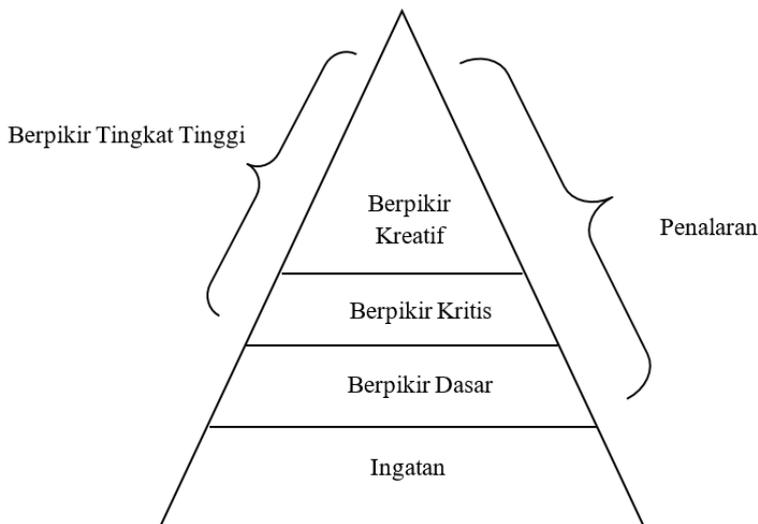
- b) Penalaran deduktif

Penalaran deduktif adalah proses berpikir untuk menarik kesimpulan berdasarkan aturan yang disepakati atau hal-hal umum menuju ke hal-hal spesifik.

Penalaran merupakan hal penting dalam proses belajar mengajar, khususnya dalam mengkonstruksi konsep-konsep matematika. Kemampuan bernalar dibutuhkan oleh siswa untuk dapat menganalisis suatu informasi, mengumpulkan bukti-bukti, menarik kesimpulan serta dapat mengemukakan pendapatnya secara logis. Hal ini sesuai dengan pendapat Martin (2009) dan Litner (2008) yang menyatakan bahwa penalaran merupakan hal yang penting dalam berpikir untuk menarik kesimpulan melalui bukti-bukti terstruktur, menyampaikan keputusan yang beralasan, dan membuat kesimpulan secara valid.

Penalaran berasal dari kata dasar nalar (*reason*). Nalar diartikan sebagai proses berpikir logis dan upaya pemecahan masalah (Subanji, 2011). Kemampuan bernalar dibutuhkan oleh siswa untuk dapat menganalisis suatu informasi, mengumpulkan bukti-bukti, menarik kesimpulan serta dapat mengemukakan pendapatnya secara logis (Martin, 2009). Seseorang dikatakan bernalar jika mampu menggunakan proses berpikirnya secara logis dalam proses pemecahan masalah. Penalaran merupakan proses mengembangkan nalar yang didasarkan pada fakta-fakta. Oleh karena itu, Subanji (2011) menegaskan bahwa penalaran merupakan proses yang melibatkan proses berpikir sistematis, logis dan analitik dalam proses memecahkan masalah. Penalaran merupakan bagian dari proses berpikir, tetapi seringkali diterapkan sebagai sinonimnya. Penalaran merupakan salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh maupun memanfaatkan pengetahuan yang telah dipelajari untuk mengembangkan pengetahuan baru. Para ahli menyatakan penalaran merupakan salah satu bagian dari proses berpikir akan tetapi tidak semua proses berpikir merupakan penalaran (Krulick dkk, 2003). Seseorang dikatakan melakukan proses berpikir dimulai dengan pengamatan indera dan melibatkan perasaan. Berpikir berarti mengarahkan diri pada objek tertentu, menyadari kehadirannya dan mengaktifkannya dalam pikiran kemudian mempunyai wawasan tentang objek tersebut. Berdasarkan hasil pengamatan indera, pikiran untuk menyusun proposisi yang sejenis dan mengarah pada kesimpulan

disebut dengan penalaran. Keterkaitan antara berpikir dan bernalar disajikan pada Gambar 2.1 berikut;



Gambar 2.1 Hirarki Berpikir

Sumber: Subanji (2011)

Subanji (2011) menjelaskan tahapan hirarki berpikir yaitu ingatan, berpikir dasar, berpikir kritis, dan berpikir kreatif. Mengingat merupakan tahapan hirarkhi berpikir yang paling rendah. Pada tahapan ini, proses berpikir yang dilalui seseorang bersifat otomatis dan tidak sampai pada tahap berpikir logis maupun analitis. Tahapan berikutnya, yaitu tahapan berpikir dasar sebagai bentuk umum dari berpikir karena keputusan dibuat pada tahapan ini. Tahapan ketiga yaitu berpikir kritis, ditunjukkan melalui kemampuan dalam menganalisis masalah, menentukan kecukupan informasi dari masalah, menentukan penambahan informasi, dan menganalisis situasi. Sedangkan, tahapan tertinggi yaitu berpikir kreatif. Tahapan ini ditandai dengan cara memecahkan masalah dengan cara-cara yang unik dan berbeda-beda. Penalaran mencakup ketiga tahapan berpikir tersebut yaitu berpikir dasar, berpikir kritis, dan berpikir kreatif.

Oleh karena itu, penalaran merupakan proses berpikir yang logis dan abstrak dalam menggunakan aturan yang digunakan (Brown, 2007; Subanji, 2011). Hal ini diperkuat pendapat Subanji (2011) bahwa penalaran merupakan tahapan kognitif dalam memecahkan masalah secara logis dan analitik. Melalui tahapan tersebut, tujuannya mencapai suatu kesimpulan dari informasi yang telah diketahui. Sehingga dapat diambil kesimpulan bahwa penalaran adalah proses mental yang melibatkan berpikir sistematis, logis, dan analitik sebagai dasar pengambilan keputusan dalam pemecahan masalah.

B. Penalaran Matematika

Selain penalaran deduktif dan induktif, terdapat beberapa jenis penalaran yang lain. Menurut Piaget sebagaimana dikutip oleh Dahar (1998:52) mengidentifikasi beberapa penalaran dalam tingkat operasional formal yaitu.

1) Penalaran Konservasi

Siswa memahami bahwa kuantitas sesuatu itu tidak berubah karena mengalami perubahan bentuk.

2) Penalaran Proporsional

Penalaran proporsional adalah aktivitas mental yang mampu memahami relasi perubahan suatu kuantitas terhadap kuantitas yang lain melalui hubungan multiplikatif.

3) Pengontrolan Variabel

Siswa dapat menetapkan dan mengontrol variabel-variabel tertentu dari suatu masalah. Jika operasi konkret pada umumnya mengubah secara serentak dua variabel yang berbeda, maka operasi formal dapat mengisolasi satu variabel pada suatu saat tertentu, misalnya pada saat eksperimen dapat mengontrol variabel yang dapat mempengaruhi variabel respon dan hanya mengubah satu variabel sebagai variabel manipulasi untuk mengetahui bagaimana pengaruh variabel manipulasi terhadap variabel respon.

4) Penalaran Probabilistik

Penalaran probabilistik terjadi pada saat seseorang menggunakan informasi untuk memutuskan apakah suatu kesimpulan benar atau tidak. Indikator dari penalaran ini adalah dapat membedakan hal-hal yang pasti dan hal-hal yang mungkin terjadi dari penghotungan peluang.

5) Penalaran Korelasional

Penalaran korelasional didefinisikan sebagai pola pikir yang digunakan seseorang untuk menentukan hubungan timbal balik antar variabel. Indikator dari penalaran ini adalah dapat mengidentifikasi apakah terdapat hubungan antar variabel yang ditinjau dengan variabel lainnya. Penalaran korelasional melibatkan pengidentifikasian dan pemverifikasian hubungan antarvariabel.

6) Penalaran Kombinatorial

Kemampuan yang mempertimbangkan seluruh alternatif yang mungkin pada suatu situasi tertentu. Anak saat memecahkan suatu masalah akan menggunakan seluruh kombinasi atau faktor yang ada kaitannya dengan masalah tertentu.

Berdasarkan uraian di atas, ada beberapa macam penalaran dalam matematika, namun yang akan dibahas dalam buku ini adalah penalaran proporsional karena sebagian besar masalah matematika yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari membutuhkan penalaran proporsional.

BAB 2

PENALARAN PROPORSIONAL

A. Penalaran Proporsional

Penalaran proporsional adalah aktivitas mental yang mampu memahami relasi perubahan suatu kuantitas terhadap kuantitas yang lain melalui hubungan multiplikatif (Dahar, 1998). Lamon (2008) mendefinisikan yaitu “*proportional reasoning involves the deliberate use of multiplicative relationships to compare quantities and to predict the value of one quantity based on the values of another*”, yang dapat diartikan bahwa penalaran proporsional melibatkan kegunaan pertimbangan dari hubungan multiplikatif untuk membandingkan kuantitas dan untuk memprediksi nilai dari suatu kuantitas berdasarkan kuantitas yang lain. Sedangkan dalam penelitian ini, penalaran proporsional adalah aktivitas mental yang mampu memahami relasi perubahan suatu kuantitas terhadap kuantitas yang lain melalui hubungan multiplikatif.

Penalaran proporsional terkait dengan kemampuan untuk mengetahui hubungan multiplikatif antara rasio dan situasi proporsional yang digunakannya. (Dole, dkk, 2008). Kemudian Lamon (2011) juga menyebutkan bahwa penalaran proporsional terdiri dari suatu jaringan pemahaman dan hubungan yang menggambarkan perkembangan kognitif siswa. Selain itu dalam penelitian Dole (2010) menyebutkan bahwa penalaran proporsional merupakan kemampuan untuk memahami situasi yang melibatkan perbandingan. Sehingga, berdasarkan pendapat ahli dapat disimpulkan bahwa penalaran proporsional merupakan penalaran yang terkait dalam situasi proporsional dan berkaitan dengan

kemampuan kognitif siswa. Situasi proporsional adalah keadaan yang memerlukan suatu perbandingan antara entitas satu dengan entitas lainnya dalam bentuk perkalian.

Penalaran proporsional merupakan suatu domain yang berguna untuk mengembangkan fleksibilitas (Berk, 2009). Dengan pemahaman penalaran proporsional dan dukungan dari pengajar yang baik, siswa di semua usia akan menjadi lebih fleksibel dalam menggunakan prosedur secara matematis. Berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh Chaim, dkk (2007) disebutkan bahwa perlu adanya implementasi pada pembelajaran terkait dengan topik penalaran proporsional.

Anak yang mampu bernalar secara proporsional memiliki beberapa karakteristik. Menurut Walle (2008) beberapa karakteristik dari penalar proporsional, yaitu (a) Memiliki pemahaman tentang kovariansi: memahami hubungan dua kuantitas yang mempunyai variasi bersama dan dapat melihat kesesuaian antara dua variasi variable, (b) Mengenali hubungan proporsional dan non proporsional dalam dunia nyata (c) Mengembangkan banyak strategi untuk menyelesaikan masalah proporsi, dan (d) Memahami rasio sebagai entitas tersendiri yang menyatakan hubungan antar kuantitas.

B. Masalah Proporsi

Proporsi merupakan konsep penting dalam matematika. Menurut Langral dan Swafford (2000), proporsi adalah pernyataan kesetaraan (ekuivalen) antara dua rasio. Sedangkan menurut *Collins Dictionary of Mathematics* (dalam Borowski dan Borwein, 2002) proporsi adalah suatu hubungan antara empat bilangan atau kuantitas dimana rasio pada bagian yang pertama sama dengan rasio pada bagian yang ke dua, dituliskan sebagai $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Konsep tentang proporsi sering dijumpai dalam kehidupan sehari-hari contohnya membandingkan harga barang saat berbelanja, menuliskan resep masakan, perbandingan dalam peluang suatu kejadian, kecepatan kendaraan. Namun menurut Norton (2014) mengatakan bahwa konsep tentang proporsi sulit untuk dipelajari siswa.

Siswa di sekolah dasar menggunakan pendekatan penyelesaian proporsional ketika dihadapkan pada masalah mencari nilai yang belum diketahui meskipun pendekatan yang digunakan tidak cocok untuk digunakan. Dooren (2008) menginvestigasi kasus dimana siswa menggunakan konsep proporsional secara berlebihan. Untuk masalah nonproporsional, siswa menjawab benar hanya pada masalah yang melibatkan penjumlahan. Dengan memperhatikan permasalahan tersebut maka siswa perlu diberikan pemahaman tentang penggunaan konsep proporsi pada suatu masalah matematika.

Siswa di sekolah menengah pertama mulai menggunakan konsep proporsi dalam menyelesaikan masalah panjang suatu jarak meskipun terkadang tidak selalu dinyatakan secara eksplisit (Chaim, dkk, 2012). Pada kelas tujuh dan delapan, siswa belajar menyelesaikan aljabar seperti membagi dua kuantitas ke dalam bagian-bagian yang tidak sama, menetapkan harga suatu barang, keuntungan dan modal, persentase, gerak, dan energi. Pada kelas sembilan, siswa menggunakan proporsi secara eksplisit dalam geometri seperti dalam penggunaan teorema pythagoras dan kesebangunan dalam segitiga. Rasio dan proporsi merupakan dua hal yang berbeda. Menurut Dole, dkk (2012), rasio mendiskripsikan suatu situasi dalam bentuk perbandingan, sedangkan proporsi digunakan untuk mendiskripsikan suatu situasi yang terkait pada bentuk perbandingan yang sama. Contoh dari rasio misalnya ketika mengatakan rasio dari banyaknya laki-laki dan perempuan di dalam kelas adalah $2 : 3$, berarti hal tersebut membandingkan banyaknya laki-laki dan banyaknya perempuan. Contoh dari proporsi misalnya perbandingan antara banyaknya laki-laki dan perempuan di dalam kelas adalah $2 : 3$, dan banyaknya siswa di dalam kelas tersebut adalah 9 anak, maka secara proporsional banyaknya anak laki-laki ada 2 anak dan banyaknya anak perempuan ada 18 anak.

Menurut Dole, dkk (2012), terdapat tiga jenis proporsi yaitu proporsi langsung (*direct proportion*), proporsi invers (*invers proportion*), proporsi kompleks (*complex proportion*). Proporsi langsung terjadi

ketika dua kuantitas berubah pada satu arah yang sama yaitu jika salah satu kuantitas bertambah (atau berkurang) maka kuantitas yang lain juga akan bertambah (berkurang), tapi ukuran perubahan tersebut tetap. Proporsi invers terjadi ketika salah satu kuantitas bertambah maka kuantitas yang lain akan berkurang. Contoh dari proporsi invers biasanya digambarkan sebagai situasi dimana suatu pekerjaan akan cepat selesai (waktu yang dibutuhkan semakin sedikit) jika pekerjaanya semakin banyak. Proporsi kompleks melibatkan lebih dari dua variabel, dan salah satu variabel mungkin berubah secara simultan (serentak) menuju arah yang sama dengan variabel lain dan berubah menuju arah yang berlawanan dengan variabel yang berbeda lainnya. Contoh dari proporsi kompleks adalah hubungan antara massa dan volume.

Menurut Chaim, dkk, (2012), variable a, b, c , dan d (dimana $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$) akan membentuk suatu hubungan proporsional dalam dua situasi berikut: (1) Ketika $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, maka keadaan tersebut disebut sebagai proporsi langsung (*direct proportion*) yaitu hasil bagi dari dua bagian rasio yang pertama, a dan b secara konstan sama dengan hasil bagi dari dua bagian rasio yang lain, c dan d (2) Ketika $axb = cxd$, maka keadaan tersebut disebut sebagai proporsi tidak langsung (*indirect proportion*) yaitu hasil dari perkalian dua bagian dari rasio a dan b , secara konstan sama dengan hasil dari perkalian dua bagian rasio yang lain, c dan d .

Siswa akan mudah mengenali adanya hubungan proporsi antara dua atau lebih variabel dalam suatu masalah ketika siswa dapat mengidentifikasi dua cerita dimana suatu masalah disebut sebagai masalah proporsi (Chaim, dkk, 2012). Kedua kriteria yang dimaksudkan adalah:

Pasti terdapat suatu hubungan multiplikatif antara dua nilai. Dengan kata lain, hubungan tersebut dapat dinyatakan secara matematis dalam bentuk perkalian atau pembagian (rasio) antara dua nilai atau lebih. Misalnya pada masalah kecepatan, terdapat hubungan multiplikatif

antara kecepatan dan waktu (vxt , bentuk perkalian) atau jarak dengan waktu ($\frac{s}{t}$, bentuk pembagian).

Hubungan multiplikatif pasti konstan, baik itu pada masalah proporsi langsung atau pada proporsi tidak langsung.

Jeong, dkk (2007) menyatakan bahwa sekali anak mudah dalam menggambarkan intuisi proporsinya pada himpunan-himpunan diskrit, anak akan lebih mudah dalam memahami algoritma matematis yang melibatkan penghitungan proporsi. Dalam penelitian Jeong, dkk (2007) juga dijelaskan bahwa sebaiknya pendidik melibatkan penalaran proporsional sejak anak masih dalam permulaan masa sekolahnya. Hal ini menunjukkan bahwa proporsi dan penalaran proporsional merupakan aspek penting dalam matematika.

Penalaran proporsional (*proportional reasoning*) merupakan aspek penting dalam pembelajaran matematika di sekolah (Shield, 2008). Penalaran proporsional, yang biasanya diperkenalkan pada akhir sekolah dasar dan menengah dalam bentuk soal cerita, sering digunakan untuk mengajarkan “pemodelan matematika dan diterapkan dalam pemecahan masalah” (Van Dooren dkk, 2005,). Masalah proporsi yang digunakan Izsak (2017) untuk mengungkap kemampuan penalaran proporsional terdiri dari 5 item yang terdiri dari berbagai format masalah, karena tugas proporsi berbentuk masalah dalam berbagai format memunculkan penggunaan beberapa strategi solusi sehingga mendorong siswa untuk bernalar proporsional. Untuk mengembangkan penalaran proporsional, siswa perlu diberikan tugas rasio dan proporsi dalam berbagai konteks misalnya, pengukuran dan harga (Lamon, 1999; Van de Walle, 2007; Cramer & Post, 1993).

Masalah proporsi yang digunakan Izsak (2017) untuk mengungkap penalaran proporsional peserta didik diuraikan dalam Gambar 2.2 berikut.

Tugas 1: Minyak wangi dibuat dengan mencampur 3 ml minyak lavender dengan 2 ml minyak mawar. Apa jumlah lain dari minyak lavender dan minyak mawar dapat dicampur untuk membuat campuran yang memiliki aroma yang persis sama?

Tugas 2: Apa artinya mengatakan bahwa minyak lavender dan minyak mawar dicampur dalam Rasio 3 banding 2?

Tugas 3: Jika saya memberi Anda sejumlah minyak lavender dan minyak mawar, bagaimana Anda bisa tahu apakah mereka dicampur dalam rasio 3 banding 2? Sebagai contoh, pertimbangkan masing-masing campuran ini:

12 ml minyak lavender, 8 ml minyak mawar

Minyak lavender 21 ml, minyak mawar 12 ml

14 ml minyak lavender, 8 ml minyak mawar

5 ml minyak lavender, 3 ml minyak mawar

Tugas 4: Sam dan Allie membuat pangsit dengan kecepatan yang sama. Allie mulai membuat pangsit lebih dulu daripada Sam. Allie telah membuat pangsit A pada saat Sam membuat Pangsit B. Kemudian, Allie membuat pangsit C dan Sam membuat pangsit D. Apakah A: B dan C: D dalam rasio yang sama?

Tugas 5: Di pabrik pangsit ada dua tim pekerja membuat pangsit yang akan dibekukan dan dijual di toko kelontong. Semua pekerja bekerja di tingkat stabil yang sama. Satu tim memiliki pekerja A dan membutuhkan B menit untuk membuat pangsit. Tim lain memiliki pekerja C dan membutuhkan waktu D menit untuk membuatnya pangsit ukuran yang sama. Apakah A: B dan C: D dalam rasio yang sama?

Gambar 2.2 Masalah Proporsi

Sumber (Izsak, 2017)

Izsak (2017) menyelidiki penalaran proporsional calon guru menggunakan tugas 1 sampai 5. Pertanyaan tersebut digunakan untuk mengetahui apakah calon guru mampu mengidentifikasi dan menyatakan hubungan proporsional. Izsak (2017) menyatakan bahwa penalaran proporsional terkait dengan bahasa, perkalian, dan hubungan antara jumlah serta notasi simbolis. Dengan demikian seorang yang benalar proporsional dapat menggunakan hubungan dari persamaan bentuk $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (Chaim, 2012).

C. Masalah Multiplikatif

Masalah didefinisikan sebagai situasi atau pertanyaan yang tidak memiliki solusi segera dan membutuhkan pemikiran serta tantangan

untuk mengatasinya (Bell, 1981; Sa'dijah, dkk., 2017). Mervis (1978) mendefinisikan masalah sebagai suatu pertanyaan atau kondisi yang sulit untuk diselesaikan dan belum dipecahkan. Menurut Kantowski (1977), "ketika seseorang dihadapkan dengan masalah, maka dia akan memikirkan cara untuk menggunakan informasi yang dimilikinya untuk mencari solusi dari masalah tersebut". Menurut Blum dan Niss (1991) masalah adalah pertanyaan terbuka tentang situasi yang menantang seseorang secara intelektual yang secara tidak langsung memiliki metode/prosedur/algorithm langsung cukup untuk menjawab pertanyaan. Sedangkan Suherman (2003) menyatakan bahwa suatu masalah biasanya memuat suatu situasi yang mendorong seseorang untuk menyelesaikannya akan tetapi tidak tahu secara langsung apa yang harus dikerjakan untuk menyelesaikannya. Memperhatikan pendapat-pendapat di atas, maka suatu pertanyaan merupakan suatu masalah apabila pertanyaan tersebut menantang untuk diselesaikan atau dijawab, dan prosedur untuk menyelesaikannya tidak dapat dilakukan secara rutin.

Masalah multiplikatif merupakan masalah penyelesaiannya melibatkan perkalian dan pembagian (Wright, 2011). Dari penelitian yang dilakukan oleh Roussel dkk (2003) diketahui bahwa kebanyakan siswa menggunakan strategi penyelesaian penjumlahan dari pada menggunakan perkalian dalam menyelesaikan masalah multiplikatif. Oleh karena itu perlu adanya penekanan pada masalah-masalah yang melibatkan perkalian. Dalam penelitian ini yang dimaksud dengan masalah multiplikatif adalah tugas proporsi penyelesaiannya melibatkan perkalian dan pembagian.

Vergnaud (1994) mengklasifikasikan empat tipe masalah multiplikatif, yaitu *Ishomorphism of measure/simple proportion*, *Product of measurement*, *Multiple proportion/double proportion* dan *comparisons of rates and ratios*. Deskripsi keempat tipe masalah ini dijelaskan dalam Tabel 2.1 berikut.

Tabel 2.1. Tipe Masalah Multiplikatif Berdasarkan Taksonomi Vergnaud

Tipe Masalah	Deskripsi
<i>Ishomorphism of measure/ simple proportion</i>	Masalah yang melibatkan suatu proporsi langsung antara dua ruang pengukuran.
<i>Product of measurement/ concatenation of simple proportion</i>	Masalah yang melibatkan perkalian kartesian antara dua ruang pengukuran pada ruang pengukuran yang ke tiga. Masalah ini tidak melibatkan proporsi langsung tapi melibatkan dua proporsi yang berdiri sendiri.
<i>Multiple proportion/double proportion</i>	Masalah yang melibatkan dua ruang pengukuran yang berbeda dan berdiri sendiri yang dapat digunakan untuk membangun ruang pengukuran yang lain.
<i>Comparisons of rates and ratios</i>	Hubungan proporsional antara dua nilai atau rasio terkait dengan perbandingan dari ruang pengukuran.

D. Masalah Multiplikatif Konteks Beragam

Masalah multiplikatif konteks beragam dalam penelitian ini adalah masalah berbentuk uraian yang terdiri dari masalah multiplikatif yang memuat minimal dua tipe masalah multiplikatif berdasarkan taksonomi Vergnaud (1994), yaitu *Ishomorphism of measure/simple proportion*, masalah *Product of measurement/concatenation of simple proportion*, masalah *Multiple proportion/double proportion* dan masalah *comparisons of rates and ratios*. Sedangkan masalah multiplikatif dikatakan sebagai masalah multiplikatif konteks tunggal jika hanya memuat salah satu tipe

masalah multiplikatif. Contoh masalah multiplikatif konteks tunggal disajikan pada Tabel 2.2 berikut.

Tabel 2.2 Contoh Masalah Multiplikatif Konteks Tunggal

Tipe Masalah	Contoh Masalah
<i>Ishomorphism of measure/simple proportion</i>	Suatu minuman rasa strawberry, idealnya merupakan campuran dari 2 gelas air putih untuk setiap $\frac{1}{3}$ gelas sirup. Berapa banyak sirup yang dibutuhkan jika ingin membuat minuman rasa strawberry dengan 33 gelas air putih?
<i>Product of measurement/ concatenation of simple proportion</i>	Kamu memiliki 4 baju atasan dan 3 rok, Kamu akan memasangkan baju atasan dan rok yang kamu miliki. Berapa banyak kemungkinan pasangan pakaian berbeda yang dapat kamu pasang dari 4 baju dan 3 rok tersebut?
<i>Multiple proportion/ double proportion</i>	<p>Sebuah karton berukuran 82 cm x 84 cm. Karton tersebut akan dipotong-potong menjadi bentuk persegi yang luasnya 100 cm².</p> <p>Ada berapa banyak persegi dengan luas 100 cm², yang dihasilkan?</p> <p>Jika, terdapat karton lain yang berukuran 48 cm x 55 cm dan akan dibuat persegi yang luasnya 36 cm. Selidikilah persegi mana yang lebih banyak kamu hasilkan (persegi dengan luas 100 cm² atau persegi dengan luas 36 cm²)</p>

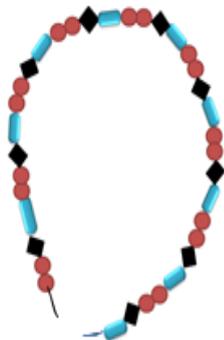
Tipe Masalah	Contoh Masalah
<i>Comparisons of rates and ratios</i>	Tiga anak laki-laki berbagi 4 piza. 2 anak perempuan berbagi 3 pizza. Siapa yang memperoleh bagian pizza lebih banyak, anak laki-laki atau perempuan?

Masalah multiplikatif konteks beragam dalam buku ini diadaptasi dari masalah proporsi Chaim (2012) bertema pola kalung yang memuat 3 kuantitas yaitu manik-manik bulat, kubik dan silinder. Adapun konstruksi masalah dan masalah mutiplikatif konteks beragam dalam penelitian ini dapat dilihat pada Tabel 2.3 dan Gambar 2.3 berikut.

Tabel 2.3 Konstruksi Masalah Multiplikatif Konteks Beragam

Masalah	Pertanyaan	Tipe masalah multiplikatif
<p>Sukma dan Anandi ingin membuat kalung menggunakan tiga jenis manik-manik batu yang berbentuk bulat, kubik, dan silinder. Sukma ingin membuat satu kalung dengan pola 2:1:1 (bulat: kubik: silinder) seperti pada gambar, yang memiliki total 108 manik-manik, sedangkan Anandi membuat kalung yang berbeda pola dengan kalung Sukma</p>	<p>1. Berapa biaya yang dikeluarkan Sukma untuk membuat satu kalung jika dia hanya membeli manik-manik dalam paket? Jelaskan jawabanmu!</p> <p>2. Berapa biaya yang dikeluarkan Sukma untuk membuat satu kalung jika dia membeli manik-manik dalam harga satuan? Manakah yang lebih murah, biaya pembuatan kalung manik-manik dalam harga paket atau harga satuan? Jelaskan jawabanmu!</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>simple proportion,</i> • <i>product of measurement</i> • <i>double proportion</i> • <i>simple proportion</i> • <i>Product of measurement</i> • <i>double proportion</i> • <i>comparisons of rates and ratios.</i>
<p>Di toko kerajinan, mereka dapat membeli manik-manik dengan ketentuan:</p> <ul style="list-style-type: none"> ❖ Untuk pembelian manik-manik dalam satuan, harganya 10% lebih tinggi daripada harga dalam paket ❖ Untuk pembelian manik-manik dalam paket, harganya sesuai dengan yang ada pada label 	<p>3. Anandi membuat satu kalung yang berbeda pola dengan kalung Sukma. Anandi menggunakan jumlah tiap jenis manik-manik sama dengan yang digunakan oleh Sukma (dalam paket). Temukan pola kalung (bulat: kubik: silinder) yang dapat dibuat oleh Anandi? Jelaskan jawabanmu!</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>simple proportion</i> • <i>Product of measurement</i>

Masalah	Pertanyaan	Tipe masalah multiplikatif
	<p>4. Anandi akan membuat satu kalung berpola 6:3:3 (bulat:kubik:silinder). Jika tiap jenis manik-manik tersedia 3 paket, berapa paling banyak pengulangan pola yang terjadi dalam kalung tersebut? Jelaskan jawabanmu!</p>	<ul style="list-style-type: none"> • <i>simple proportion</i> • <i>Product of measurement</i> • <i>double proportion</i>
	<p>5. Tulis persamaan untuk tiap jenis manik-manik (bulat, kubik, silinder) yang menghubungkan:</p> <ol style="list-style-type: none"> a. harga manik-manik (Y) dengan banyaknya paket (X) b. harga manik-manik (Y) dengan banyaknya manik-manik (Z) 	<ul style="list-style-type: none"> • <i>simple proportion</i> • <i>Product of measurement</i>



Sukma dan Anandi ingin membuat kalung menggunakan tiga jenis manik-manik batu yang berbentuk bulat, kubik, dan silinder. Sukma ingin membuat satu kalung dengan pola 2:1:1 (bulat: kubik: silinder) seperti pada gambar, yang memiliki total 108 manik-manik, sedangkan Anandi membuat kalung yang berbeda pola dengan kalung Sukma

Di toko kerajinan, mereka dapat membeli manik-manik dengan ketentuan:

- ❖ Untuk pembelian manik-manik dalam satuan, harganya 10% lebih tinggi daripada harga dalam paket
- ❖ Untuk pembelian manik-manik dalam paket, harganya sesuai dengan yang ada pada label seperti gambar berikut.



1. Berapa biaya yang dikeluarkan oleh Sukma untuk membuat satu kalung jika Ia hanya membeli manik-manik dalam paket? Jelaskan jawabanmu!
2. Berapa biaya yang dikeluarkan untuk membuat satu kalung jika Sukma membeli manik-manik dalam harga satuan? Manakah yang lebih murah, biaya pembuatan kalung manik-manik dalam harga paket atau harga satuan? Jelaskan jawabanmu!
3. Anandi membuat satu kalung yang berbeda pola dengan kalung Sukma. Anandi menggunakan jumlah tiap jenis manik-manik sama dengan yang digunakan oleh Sukma. Temukan pola kalung (bulat: kubik: silinder) yang dapat dibuat oleh Anandi? Jelaskan jawabanmu!
4. Anandi akan membuat satu kalung berpola 6:3:3 (bulat: kubik: silinder). Jika tiap jenis manik-manik tersedia 3 paket, berapa paling banyak pengulangan pola yang terjadi dalam kalung tersebut? Jelaskan jawabanmu!
5. Tulis persamaan untuk tiap jenis manik-manik (bulat, kubik, silinder) yang menghubungkan:
 - a. harga manik-manik (T) dengan banyaknya paket (X)
 - b. harga manik-manik (T) dengan banyaknya manik-manik (Z)

Gambar 2.3 Masalah Multiplikatif Konteks Beragam

BAB 3

KEMAMPUAN PENALARAN PROPORSIONAL

A. Kemampuan Penalaran Proporsional

Kemampuan berpikir dan beralasan secara proporsional merupakan salah satu faktor penting dalam pengembangan kemampuan seseorang untuk memahami dan menerapkan matematika. Siswa mungkin bisa menyelesaikan masalah proporsional dengan prosedur hafalan, ini tidak berarti mereka bisa berpikir secara proporsional.

Penalaran proporsional sulit didefinisikan dalam satu atau dua kalimat sederhana. Ini bukan sesuatu yang bisa atau tidak bisa dilakukan. Menurut Lamon dalam Van de Walle, hal-hal berikut merupakan beberapa karakteristik dari pemikir proporsional:

- Pemikir proporsional harus memiliki pemahaman kovariansi. Yakni, mereka memahami hubungan dimana dua kuantitas bervariasi bersama dan dapat melihat bagaimana variasi dari suatu kuantitas sesuai dengan variasi kuantitas yang lain.
- Pemikir proporsional mengenali hubungan proporsional yang berbeda dari hubungan non-proporsional dalam konteks dunia nyata.
- Pemikir proporsional mengembangkan banyak strategi untuk menyelesaikan proporsi atau membandingkan rasio, sebagian besar berdasarkan strategi informal bukan algoritma yang sudah jadi.

- Pemikir proporsional memahami rasio sebagai entitas tersendiri yang menyatakan suatu hubungan yang berbeda dari kuantitas-kuantitas yang mereka bandingkan.

Dengan penguasaan penalaran proporsional, siswa dibekali untuk tidak berpikir melalui konsep yang identik dan dengan cara persis dengan yang telah diajarkan atau dalam contoh dalam teks. Banyak sekali kemungkinan mengolah jawaban saat mengembangkan kemampuan bernalar secara proporsional. Menurut Johar, penalaran proporsional adalah penalaran tentang pemahaman keserupaan struktur dua relasi dalam masalah proposional. Lamon berpendapat yaitu, *“proportional reasoning involves the deliberate use of multiplicative relationships to compare quantities and to predict the value of one quantity based on the values of another”*, yang dapat diartikan sebagai penalaran proporsional melibatkan kegunaan pertimbangan dari hubungan multiplikatif untuk membandingkan kuantitas dan untuk memprediksi nilai dari suatu kuantitas berdasarkan kuantitas yang lain. Lesh, Post, dan Behr mengklaim bahwa karakteristik esensial dari penalaran proporsional melibatkan penalaran mengenai hubungan keseluruhan antara pernyataan dua rasional seperti nilai, rasio, hasil bagi, dan pecahan. Diperkirakan lebih dari setengah populasi orang dewasa tidak dianggap sebagai pemikir proporsional. Hal ini berarti kita tidak menguasai kebiasaan dan keterampilan penalaran proporsional dengan hanya bertambah umur. Melihat dari kondisi yang ada, penalaran proporsional seharusnya semakin ditingkatkan dengan penekanan pada usia sekolah terutama pada jenjang kelas 5-9. Telah dikaji dan disepakati oleh para peneliti bahwa penalaran proporsional merupakan konsep penting bagi siswa. Dalam pelajaran matematika banyak konsep yang mengharuskan siswa mampu berpikir proporsional. Ini dapat menunjukkan tinggi rendahnya penguasaan matematika.

Beberapa contoh dari masalah penalaran proporsional sebagai berikut:

1. Dean dan Tasha bersamaan meninggalkan rumah pada pukul 10.00. dan berjalan 2 mil menuju kantor pos, 3 mil dari kantor pos ke

kebun binatang dan 1 mil dari kebun binatang ke rumah. Tasha berjalan 2,5 mil menuju rumah temannya, 1,5 mil dari rumah teman Tasha ke toko obat, dan 3 mil dari toko obat ke rumah. Keduanya tiba di rumah tepat pukul 12.30. jelaskan dengan tepat siapa yang berjalan lebih cepat, Dan atau Tasha?

2. Kamu mempunyai foto di komputermu dan ukurannya (atau 75%) dari ukuran asli. Kamu berubah pikiran dan ingin mengembalikan ukuran aslinya. Berapa angka perbandingan ukuran saat ini yang harus dimasukkan ke komputer untuk memerintahkan agar mengembalikkan ke ukuran semula?
3. Perusahaan jus aneka buah botolan memiliki banyak variasi jus buah. Satu botol kecil jus apel terdiri dari 12 kaleng sari apel dan 30 kaleng air. Satu botol besar jus raspberry bercampur 16 kaleng sari raspberry dan 36 kaleng air. Botol manakah yang lebih terasa buahnya?

Berdasarkan ketiga contoh tersebut, penalaran proporsional memiliki berbagai bentuk yang berbeda. Tidak ada penggunaan formula atau ketentuan untuk menyelesaikan setiap tipe masalah proporsional. Solusinya melibatkan kemampuan penalaran. Literatur mengenai penalaran proporsional mengungkapkan pandangan mayoritas luas bahwa penalaran proporsional berkembang dari pemikiran kualitatif hingga membangun strategi multiplikatif. Membangun penalaran adalah usaha untuk menerapkan pengetahuan tentang penjumlahan atau pengurangan terhadap proporsinya.

Saat penggunaan strategi penjumlahan dan pengurangan, siswa mencatat pola dalam rasio kemudian menyelesaikannya secara aditif terhadap kuantitas yang tidak diketahui. Hal ini tampaknya menjadi strategi dominan bagi banyak siswa di tingkat dasar dan menengah pertama. Dan juga sukses untuk memecahkan soal dengan rasio bilangan bulat. Namun dengan soal berupa non integer atau bukan bilangan bulat, strategi ini bukanlah solusi. Bahkan menjadi kesulitan dan sering terjadi kesalahan bagi siswa saat mengatasi soal pada

tingkat menengah atas apabila masih menerapkan strategi ini. Kesalahan strategi yang sering menjadi perhatian dalam penalaran proporsional yang pertama adalah ketika siswa mengabaikan Sebagian informasi soal yang telah diberikan. Kesalahan yang kedua yang sering terjadi adalah perbedaan rasio. Siswa menggunakan perbedaan rasio yang satu kemudian menerapkannya pada rasio lainnya yang belum diketahui. Penalaran proporsional adalah salah satu kemampuan paling penting untuk dikembangkan selama kelas menengah. Dengan menggunakan penalaran proporsional, siswa mengkonsolidasikan pengetahuan mereka tentang matematika sekolah dasar dan membangun pondasi untuk matematika sekolah menengah dan penalaran aljabar. Siswa yang gagal mengembangkan penalaran proporsional cenderung menghadapi hambatan dalam memahami matematika tingkat tinggi, terutama aljabar. Dalam tahapan perkembangan kognitif Piaget, penalaran proporsional dianggap mengantarkan siswa pada awal tahap operasi formal. Berikut adalah ciri-ciri tahapan perkembangan kognitif:

Tahapan	Ciri-ciri
Sensorimotor (0-2 tahun) Membentuk pemahaman melalui pengalaman indra dan aksi fisik.	Perkembangan mental ditandai oleh kemajuan yang pesat dalam kemampuan bayi dalam mengorganisasikan dan mengoordinasikan sensasi melalui Gerakan dan tindakan fisik.

Tahapan	Ciri-ciri
<p>Pra-operasional (2-7 tahun)</p> <p>Menceritakan dunia menggunakan kata dan gambaran.</p>	<p>Anak dapat membuat imitasi yang secara tidak langsung dari bendanya sendiri, melakukan permainan simbolis, dapat menggambar realistis, tetapi tidak proporsional, mengetahui bentuk-bentuk dasar geometris (bulat, bundar, persegi), mulai menggunakan suara sebagai representasi benda atau kejadian. Perkembangan bahasa sangat memperlancar perkembangan konseptualanak dan juga perkembangan kognitif anak, pemikiran anak berkembang pesat secara bertahap ke arah tahap konseptualisasi, namun belum bisa berpikir multidimensi. Anak masih egosentris (belum bisa melihat dari perspektif orang lain), adaptasi dilakukan tanpa gambaran yang akurat, dan belum mampu meniadakan suatu tindakan dengan memikirkan tindakan tersebut ke arah sebaliknya.</p>
<p>Operasional konkret (7-11 tahun)</p> <p>Mengetahui alasan logis rasional tentang kejadian konkret dan dapat mengelompokkan benda</p>	<p>Logika tentang sifat timbal balik dan kekekalan, melakukan klasifikasi, tidak lagi bersifat egosentris, pikiran masih terbatas pada hal-hal yang konkret, belum dapat memecahkan persoalan yang abstrak.</p>

Tahapan	Ciri-ciri
Operasional formal (mulai 11 tahun ke atas) Mulai berpikir abstrak dan logis.	Perkembangan nalar dan logika mulai berkembang, asimilasi dan akomodasi berperan membantuk skema yang lebih menyeluruh. Mampu berpikir deduktif, induktif dan abstraktif.

Piaget menimbang kemampuan bernalar secara proporsional menjadi indikator utama dari berpikir operasional formal, dan pada tahap ini terlihat sebagai level tertinggi dari perkembangan kognitif. Penalaran proporsional diajarkan terutama di pembelajaran matematika. Konsep operasional formal Piaget sering berhubungan dengan kemampuan seseorang untuk bernalar secara proporsional. Pencapaian penalaran proporsional adalah hal yang terpenting dari perkembangan kognitif siswa. Piaget menjelaskan tiga tahap perkembangan penalaran proporsional. Pertama, siswa tidak menyadari adanya rasio dan mencari solusi dengan menebak. Kedua, siswa menyadari maksud soal. Siswa mencari solusi dengan menaksir kemudian menghitung, namun asumsi perubahan suatu kuantitas dihasilkan dari kesamaan perubahan kuantitas lainnya. Tahap terakhir, proporsionalitas adalah menemukan dan mengaplikasikan untuk memperoleh penyelesaian yang benar. Dari beberapa pendapat, peneliti menyimpulkan bahwa yang dimaksud penalaran proporsional adalah kemampuan yang mampu menghubungkan dan menentukan perbedaan dua kuantitas berdasarkan hubungan multiplikatif diantara keduanya dan mampu menyusun strategi saat memecahkan masalah tanpa terpaku pada aturan jadi.

B. Indikator Penalaran Proporsional

Tidak hanya menjadi inti dari kurikulum matematika, penalaran proporsional juga merupakan indikator yang baik dari pencapaian

matematika yang lebih tinggi. Berdasarkan penelitian, NCTM menerbitkan mengembangkan pemahaman pokok rasio, proporsi dan penalaran proporsional (*Developing Essential Understanding of Ratios, Proportions & Proportional Reasoning*) yang mengidentifikasi enam komponen dalam penalaran proporsional:

a. Berpikir Relatif (*Relative Thinking*)

Salah satu komponen yang paling penting dari penalaran proporsional adalah kemampuan untuk menganalisis perubahan relatif. Kemampuan ini diperlukan siswa untuk memahami dan mengidentifikasi perbedaan antara perubahan mutlak (jumlah pasti perubahan independent yang tidak terkait hal lain) dan perubahan relatif (berapa banyak yang berubah pada perbandingan pada sesuatu lainnya). Melakukan dan memikirkan perbandingan dua jumlah adalah pemahaman pokok untuk menyokong penalaran proporsional. Sebagai pondasi adanya perubahan relatif. Kemampuan berpikir relatif merupakan kemampuan kognitif yang paling baik untuk diajarkan. Contohnya, terdapat dua ular yang memiliki ukuran yg berbeda, yang satu panjangnya 4 kaki dan lainnya berukuran 6 kaki. Mereka tumbuh menjadi 8 kaki dan 10 kaki secara berturut-turut. Berapa banyak mereka tumbuh?

b. Pembagian (*partition*)

Partitioning (pembagian) adalah proses pembagian objek atau benda menjadi bagian-bagian yang lebih mendalam. Hal ini dimaksudkan bahwa bagian-bagian tersebut tidak tumpang tindih dan keseluruhannya termasuk didalam bagian-bagian itu. *Partitioning* merupakan bagian jantung (dasar) dari pemahaman angka rasional. Pecahan dan decimal terbentung dari *Partitioning* (pembagian). Ada dua tipe *Partitioning* (pembagian): pembagian partitive dan pembagian quotitive. Pembagian partitif adalah gagasan atau ide untuk membagi ukuran sama banyak. Contoh, jika ada 4 orang yang akan berbagi 5 pizza, siswa akan memulai dengan memotong pizza menjadi 4 bagian

dan memberikannya ke setiap orang yang ada. Kemudian mereka menyadari cara yang lebih efisien untuk memberikan pizza ke semua orang dan membagi bagian pizza yang tersisa menjadi empat bagian. Quotitive adalah berapa banyak yang dapat dibagi untuk ukuran yang lebih besar. Contoh, pada saat kamu membeli satu potong(slice) pie di sebuah restoran, berarti kamu mendapatkan $\frac{1}{3}$ bagian dari satu pie. Jika mereka (restoran) masih memiliki $4\frac{1}{2}$ potongan pie, berapa banyak yang bisa mereka jual? Jawabannya adalah $13\frac{1}{2}$ potong. Potongan sangatlah berbeda dengan satu bagian. $\frac{1}{2}$ potongan itu bukan berarti $\frac{1}{2}$ bagian dari pie atau artinya setiap pie memiliki $\frac{1}{6}$ bagian.

c. Pengelompokkan (*unitizing*)

Pertanyaan “berapa banyak?” diperlukan dalam soal pengukuran. Jika mengukur dua jenis benda yang sama dengan ukuran yang berbeda, pastilah ukurannya akan berbeda, lebih besar atau lebih kecil, tergantung satuan. *Unitizing* (pengelompokkan) adalah proses kognitif yang terjadi setelah mengidentifikasi satuan tapi memungkinkan pilihan pokok berdasarkan ukuran kemampuan yang lebih diinginkan. Contohnya, Sereal yang mana yang sebaiknya dibeli? Choco berries 16 ons dengan harga \$3.36 atau 12 ons dengan harga \$2.64?

d. Interpretasi angka rasional (*rational number interpretation*)

Angka rasional dibangun dari pemahaman siswa akan pecahan tapi tidak sama dengan pecahan. Kata pecahan penuh dengan keambiguan dan berbagai interpretasi dari dalam maupun luar himpunan matematika. Pemahaman angka rasional melibatkan pemahaman bahwa ada banyak perbedaan makna yang berakhir dengan melihat kesamaan saat mereka menuliskan simbol pecahan. Keahlian tidaklah cukup untuk memanipulasi simbol pecahan tapi dengan melihat pada jenis masalah. Kier mengidentifikasi lima interpretasi utama dari angka rasional:

- Sebagai Perbandingan Part/whole (*as part/whole comparison*)
 - Sebagai operator (*as operators*)
 - Sebagai hasil bagi (*as quotients*)
 - Sebagai pengukur (*as measures*)
 - Sebagai rasio (*as ratios*)
- e. Penggunaan Rasio (*ratio sense*)
- Mengembangkan penggunaan rasio sangat penting dalam penalaran proporsional karena definisi yang tepat dan arti dari rasio dan harga berasal dari konteks masalah. Beberapa tujuan masalah dalam materi pelajaran adalah bahwa setiap hari bahasa dan penggunaan harga maupun rasio tidak tetap, kurang dari benar dan kesulitan untuk mendefinisikan dengan tepat. Terdapat empat perbedaan tipe rasio yang penting dalam masalah proporsional:
- *Well-chunked measure*
 - *Part-part whole*
 - *Associated set*
 - *Growth (Stretcher dan shrinkers)*
- f. Memperhatikan jumlah dan penggantian (*attention to quantities and change*)

Kebanyakan cara mengganti siswa berdasarkan intuisi dan dibangun dari pengalaman sendiri. Keutamaan mempelajari mengganti dalam bentuk aljabar siswa perlu mengembangkan bahasa penjelasan dan menyampaikan cara merubah, cara untuk mengelompokkan penggantian dan mengembangkan representasi. *NCTM identifies the essential understanding required about change in these ways: (1) Reasoning with ratios involves attending to and coordinating two quantities, (2) Forming a ratio as a measure of a real-world attribute involves isolating that attribute from other attributes and understanding the effect of changing each quantity on the attribute of interest and (3) A proportion is a relationship of*

equality between two ratios. NCTM mengidentifikasi pemahaman pokok yang diperlukan untuk mengganti dengan cara sebagai berikut:

- Penalaran dengan rasio melibatkan kemunculan dan mengkoordinasikan dua jumlah.
- Membentuk rasio sebagai pengukur dari perangkat dalam kehidupan sehari-hari yang melibatkan pemisahan perangkat dari perangkat lainnya dan memahami pengaruh perubahan setiap kuantitas dalam perangkat yang diminati dan .
- Sebuah proporsi adalah suatu hubungan persamaan antara dua rasio.

Contoh

1. Delapan orang mengecat sebuah ruangan memakan waktu 5 jam, berapa lama waktu yang diperlukan jika dikerjakan 10 orang?
2. Untuk pesta yang terdiri dari 13 orang kamu membutuhkan 5 pon permen. jika kamu membuat pesta untuk 20 orang berapa banyak permen yang kamu butuhkan?

BAB 4

STRATEGI MENYELESAIKAN MASALAH PROPORSI

A. Strategi menyelesaikan masalah Proporsi

Dalam kehidupan sehari-hari, kita membutuhkan strategi untuk memecahkan suatu permasalahan. Kita harus memutuskan strategi apa yang tepat digunakan untuk menyelesaikan suatu permasalahan. Jadi strategi berkaitan dengan pengambilan keputusan. Begitu pula dalam masalah penalaran proporsional ini. Siswa memiliki strategi-strategi dalam menyelesaikan masalah proporsional yang sedang dihadapi.

Menurut Merpaung dalam Johar (2006:37), dalam bidang psikologi, strategi berpikir merupakan suatu konsep psikologis yang berkaitan dengan struktur berpikir (suatu sistem yang berkaitan). Struktur berpikir dan strategi berpikir saling mempengaruhi seseorang dalam mengolah informasi. Artinya bagaimana seseorang mengolah informasi dikendalikan oleh struktur berpikir yang dimiliki dan sebaliknya proses atau strategi yang digunakan dalam mengolah informasi menentukan struktur berpikirnya.

Berdasarkan penelitian para ahli terdapat beberapa strategi yang digunakan siswa dalam menyelesaikan masalah rasio dan proporsi.

1. Menurut Chaim, dkk (2012), strategi yang digunakan dapat dibagi dalam dua strategi yaitu strategi formal dan strategi pra formal.

Berikut beberapa strategi menurut Chaim, dkk (2012) yang digunakan siswa dalam menyelesaikan masalah rasio dan proporsi.

- a) Strategi Formal, yaitu strategi yang digunakan untuk menyelesaikan masalah proporsi dengan menerapkan rumus proporsi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, (a, b, c, d \neq 0)$
 - b) Strategi Pra Formal, yaitu strategi yang digunakan untuk menyelesaikan masalah proporsi melalui: strategi additive, intuitif, penjumlahan berulang, menyederhanakan rasio, menemukan nilai satuan.
2. Menurut Behr, dkk (1983) terdapat tiga tingkatan strategi dalam membangun penalaran proporsional yang dapat digunakan oleh siswa untuk mengembangkan pemahaman mereka tentang hubungan proporsional, yaitu: (1) kualitatif, (2) membangun penalaran atau strategi yang didasarkan pada penjumlahan berulang dan rasio yang diberikan, (3) penalaran multiplikatif.
3. Johar (2006) mengamati bahwa ada 9 strategi yang digunakan oleh siswa untuk menyelesaikan soal-soal yang berkaitan dengan perbandingan dan dikelompokkan ke dalam dua golongan, yaitu sebagai berikut.
- 1) Strategi yang keliru, sebagai berikut.
 - a) Tak menjawab
 - b) Intuitif: menggunakan terkaan atau perhitungan yang tidak logis
 - c) Aditif: menentukan selisih dalam menyelesaikan masalah
 - d) Percobaan cara proporsi: $\frac{x}{9} = \frac{12}{8}$, maka $x = \frac{72}{12}$
 - e) Cara yang lain yang tidak masuk pada 4 strategi di atas
 - 2) Strategi yang benar, seperti berikut.
 - a) Rumus perbandingan: yaitu kesamaan dua rasio, misalnya
$$: \frac{8}{12} = \frac{9}{RT}$$

- b) Alasan perbandingan : RS tiga perdua dari CD, maka RT juga sama dengan dua pertiga dari CE. Jadi RT tiga per dua dari 9 sama dengan 13,5
 - c) Aljabar: $8x = 9 \cdot 12$, jadi $x = 13,5$
 - d) Strategi yang lain yang tidak masuk 3 strategi di atas.
4. Johar (2006) menyatakan bahwa ada paling sedikit 4 strategi yang berbeda yang dapat digunakan untuk menyelesaikan soal-soal yang menyangkut perbandingan senilai. Untuk memudahkan penjelasan tentang strategi ini, maka dapat dikaitkan dengan suatu masalah proporsional, seperti contoh berikut ini.

Ibu Mila ingin membuat roti. Untuk 165 gram tepung terigu ia mencampurkan 50 gram mentega. Jika Ibu Mila ingin menggunakan 660 gram tepung terigu. Berapa gram mentega yang dibutuhkannya?

1) Strategi yang keliru

a) Hitungan tidak berpola

Menggunakan terkaan atau hitungan yang tidak berpola. Misalnya banyak mentega = $660 + 165$; atau banyak mentega = $660 + 165 + 50 = 875$. Alasannya, jika tepung yang digunakan lebih banyak maka mentega yang digunakan juga lebih banyak

b) Strategi Aditif

Menentukan selisih dalam menyelesaikan masalah. Misalnya karena selisih mentega dan tepung terigu adalah 115 gram maka 660 ditambah 115 hasilnya 775 gram. Atau selisih antara 660 dan 165 adalah 495, kemudian 495 ditambahkan 50 hasilnya 645 gram mentega.

c) Strategi percobaan Persamaan

Misalnya $\frac{x}{165} = \frac{660}{50}$, $x = 150$, seharusnya jawabannya 200 gram

2) Strategi yang benar

- a) Strategi replikasi (penjumlahan berulang) Strategi ini hanya bisa diterapkan jika bilangan pengali antar kuantitas dalam besaran yang sama merupakan bilangan bulat. Contohnya jika permasalahan seperti berikut ini.

165 gram tepung terigu dicampurkan 50 gram mentega

330 gram tepung terigu dicampurkan 100 gram mentega

495 gram tepung terigu dicampurkan 150 gram mentega

660 gram tepung terigu dicampurkan 200 gram mentega

- b) Strategi *building-up* (membangun secara bertahap)

Yaitu memperbesar rasio dan atau memperkecil rasio, lalu menjumlahkan rasio-rasio yang diperkecil atau yang diperbesar tersebut. Pada permasalahan yang sama, untuk mendapatkan 660 gram tepung terigu, berarti 165 gram tepung terigu ditambah 495 gram tepung terigu. Jika 165 gram tepung terigu ditambahkan 50 gram mentega, berarti 495 (kelipatan 3 dari 165) gram tepung terigu ditambahkan 150 (kelipatan 3 dari 50) gram mentega. Dengan demikian diperoleh

$$165 + 495 = 660$$

$$50 + 150 = 200$$

Jadi jawabannya 200 gram mentega

- c) Strategi menyederhanakan rasio

Yaitu menyederhanakan rasio menjadi 1:m, dimana m merupakan bilangan bulat. Strategi ini hanya bisa diterapkan jika bilangan pengali antar kuantitas dalam besaran yang sama merupakan bilangan bulat. Contohnya jika permasalahan diselesaikan dengan strategi ini adalah.

$$165 : 660 = 1:4$$

$$50 \times 4 = 200 \text{ gram mentega}$$

d) Strategi faktor dari perubahan

Strategi faktor dari perubahan untuk masalah di atas yaitu jika tepung bertambah sebanyak 4 kali semula, maka mentega juga bertambah sebanyak 4 kali semula. Sehingga mentega yang dibutuhkan untuk 660 gram tepung terigu adalah $4 \times 50 = 200$ gram

e) Strategi nilai satuan

Jika 165 gram tepung terigu dicampur 50 gram mentega, berarti 1 gram tepung terigu dicampur dengan 0,303 gram mentega. Sehingga untuk 660 gram tepung terigu dengan $660 \times 0,303 = 199,98$, dibulatkan menjadi 200 gram mentega.

f) Strategi operator

Misalnya untuk soal di atas, yaitu

$$x = \frac{660}{165} \times 50 = 200 \text{ gram}$$

g) Strategi persamaan

$$\frac{660}{165} = \frac{x}{50} \quad x = 200 \text{ gram}$$

h) Strategi hitungan

Suatu strategi disebut strategi hitungan bila:

- ✓ Siswa langsung menggunakan operasi perkalian dan atau pembagian pada kuantitas-kuantitas yang diketahui tanpa jelas apakah siswa menggunakan strategi (e), (f), (g), misalnya.

$$50 : \frac{1}{4} = 200 \text{ gram}$$

- ✓ Siswa menggunakan strategi nilai satuan, tetapi mengabaikan (menghilangkan) satuan-satuan pengukuran, misalnya:

$$\frac{50}{165} = 0,303\dots$$

$$60 \times 0,303\dots = 199,98$$

B. Hubungan antara strategi dalam menyelesaikan masalah proporsional dengan penalaran proporsional

Untuk mengetahui kemampuan penalaran proporsional siswa tidak hanya berdasarkan strategi siswa dalam menyelesaikan masalah proporsional. Siswa-siswa yang menggunakan strategi yang sama belum tentu menggunakan penalaran proporsional yang sama pula. Misalnya: penyelesaian untuk soal berikut: “Ibu Mila ingin membuat roti. Untuk 165 gram tepung terigu ia mencampurkan 50 gram mentega. Jika Ibu Mila ingin menggunakan 660 gram tepung terigu. Berapa gram mentega yang dibutuhkannya?”

Misalnya siswa menyelesaikan dengan strategi persamaan,

$$\frac{660}{165} = \frac{x}{50} \quad x = 200 \text{ gram}$$

Kemungkinan pemikiran siswa yaitu.

- 1.) Siswa dapat menjelaskan bahwa strategi ini digunakan karena permasalahan menghendaki komposisi yang sama. Sehingga perbandingan tepung terigu dan mentega yang dicampurkan sama.
- 2.) Siswa tidak dapat menjelaskan mengapa strategi persamaan digunakan untuk menyelesaikan masalah. Siswa hanya mengungkapkan bahwa “rumusnya seperti itu” atau “seperti itu yang diajarkan di sekolah”. Ketika diminta jawaban yang masuk akal, siswa hanya mampu menunjukkan hubungan tepung terigu dan mentega dalam kualitatif, yaitu jika tepung terigu banyak, menteganya juga banyak.

Hal ini juga berlaku pada strategi-strategi yang lain. Pada penggunaan setiap strategi dapat diidentifikasi bagaimana siswa memahami keserupaan struktur dua hubungan dan level penalaran proporsional yang dimiliki oleh siswa (Johar, 2006:41-44)

BAB 5

LEVEL PENALARAN PROPORSIONAL

A. Level Penalaran Proporsional Menurut Rahma Johar

Penalaran proporsional terkait dengan proses menyusun strategi dalam menyelesaikan masalah dapat dihubungkan dengan situasi proporsional. Strategi yang digunakan dan alasan dalam menjawab yang diberikan siswa dapat digunakan untuk mengidentifikasi level penalaran proporsional siswa. Menurut Johar (2006: 45) terdapat 5 level penalaran proporsional siswa yaitu 1) penalaran kualitatif; 2) penalaran aditif; 3) penalaran pra-multiplikatif; 4) penalaran multiplikatif implisit; 5) *penalaran multiplikatif*". Adapun karakteristik dari kelima level seperti dijelaskan pada tabel 5.1 berikut.

Tabel 5.1 Karakteristik Level Penalaran Proporsional

Level penalaran Proporsional	Karakteristik
Level 1. Penalaran kualitatif	Penalaran siswa hanya didasarkan pada hubungan kualitatif, seperti “menjadi bertambah atau berkurang”, tanpa menjelaskan berapa atau bagaimana “penambahan” atau “pengurangannya”.

Level penalaran Proporsional	Karakteristik
	<p>Sedangkan untuk menentukan kuantitas yang ditanyakan pada masalah <i>mencari satu nilai yang belum diketahui</i>, penalaran siswa pada level ini dibedakan menjadi dua sub level, yaitu:</p> <ol style="list-style-type: none"> Menggunakan strategi hitungan tidak berpola Menggunakan algoritma tanpa dasar konseptual <p>Untuk menyelesaikan masalah membandingkan rasio, siswa sub-level (a) tetap menggunakan penalaran kualitatif, dan siswa sub-level (b) menggunakan hubungan kualitatif atau hubungan aditif.</p>
Level 2 Penalaran Aditif	<p>Penalaran siswa didasarkan pada hubungan aditif (untuk “bilangan pengali” bulat dan pecahan), baik untuk menyelesaikan masalah mencari satu nilai yang belum diketahui, maupun untuk menyelesaikan masalah membandingkan rasio.</p>
Level 3. Penalaran Pra-Multiplikatif	<p>Penalaran siswa didasarkan pada hubungan multiplikatif, namun terbatas pada masalah yang melibatkan “bilangan pengali” bulat. Sedangkan jika bilangan pengali pecahan penalaran siswa didasarkan pada hubungan aditif, atau membandingkan sisa pembagian (rasio sama jika sisa pembagian sama), baik untuk menyelesaikan masalah mencari satu nilai yang belum diketahui, maupun untuk menyelesaikan masalah membandingkan rasio.</p>

Level penalaran Proporsional	Karakteristik
Level 4. Penalaran Multiplikatif Implisit	Penalaran siswa didasarkan pada hubungan multiplikatif secara bertahap, karena didasarkan pada kecenderungan linear atau replikasi dan pola (sering dikenal dengan strategi <i>building-up</i>), baik jika bilangan pengali bulat maupun pecahan. Dengan demikian siswa menggunakan hubungan multiplikatif tidak secara sadar (implisit), baik untuk menyelesaikan masalah mencari satu nilai yang belum diketahui, maupun untuk menyelesaikan masalah membandingkan rasio
Level 5. Penalaran Multiplikatif	Penalaran siswa didasarkan pada hubungan multiplikatif, baik untuk menyelesaikan masalah mencari satu nilai yang belum diketahui, maupun untuk menyelesaikan masalah membandingkan rasio.

B. Level Penalaran Proporsional Menurut Langrall dan Swafford

Level Langrall dan Swafford (2000) yaitu terdapat empat level dalam strategi penalaran proporsional, level tersebut didasarkan pada strategi siswa sekolah menengah dalam menyelesaikan empat tipe masalah proporsi yaitu masalah *part-part whole*, *associated sets*, *well known measures*, dan *growth*. Keempat level strategi tersebut adalah sebagai berikut.

Tabel 2.2 Level penalaran proporsional Berdasarkan strategi penyelesaian Masalah proporsi

Level	Solusi strategi yang digunakan oleh siswa
<i>0.Nonproportional Reasoning</i>	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Menebak atau menggunakan gambar untuk memvisualisasi jawaban yang diberikan ✓ Sulit untuk mengenali hubungan multiplikatif dari pengukuran yang diketahui ✓ Menggunakan bilangan, operasi atau strategi secara acak. ✓ Cara yang digunakan masih kurang tepat dan tidak sesuai dengan situasi yang dihadapi ✓ Tidak dapat menemukan hubungan antara dua pengukuran yang saling terkait
1.Informal reasoning about proportional situation	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Menggunakan gambar, model atau manipulasi untuk membuat penggambaran dari situasi yang ada ✓ Membuat sutau perbandingan kualitatif berdasarkan gambar, model atau manipulasi yang dibuat
2.Quantitative reasoning	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Menggunakan satuan-satuan dari komposisi yang diberikan. ✓ Menemukan nilai satuan dari pengukuran yang ada dan menggunakannya dalam menyelesaikan masalah secara keseluruhan ✓ Mengidentifikasi adanya faktor skalar atau menggunakan faktor scalar yang dapat mempengaruhi perubahan yang terjadi pada pengukuran yang ada. Bisa juga siswa menggunakan table untuk menyelidiki perubahan yang terjadi pada pengukuran yang ada

Level	Solusi strategi yang digunakan oleh siswa
	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Menggunakan pecahan yang ekuivalen ✓ Membangun adanya dua pengukuran tanpa menggunakan gambar ✓ Siswa mengidentifikasi dengan melihat hubungan yang terus meningkat atau menurun dari dua pengukuran tersebut
3. Formal proportional reasoning	<ul style="list-style-type: none"> ✓ Membuat suatu hubungan proporsi menggunakan variabel dan menyelesaikannya menggunakan sifat perkalian silang atau pecahan yang ekuivalen ✓ Memahami struktur hubungan yang ada pada setiap pengukuran

BAB 6

PENALARAN PROPORSIONAL MAHASISWA DALAM MENYELESAIKAN MASALAH MULTIPLIKATIF KONTEKS BERAGAM BERDASARKAN TEORI APOS

Penalaran proporsional merupakan proses berfikir yang logis terkait memahami relasi perubahan suatu kuantitas terhadap suatu kuantitas yang lain melalui hubungan multiplikatif sebagai dasar menyimpulkan ketika memecahkan masalah. Sedangkan masalah yang digunakan dalam penelitian ini yaitu masalah multiplikatif konteks beragam. Masalah multiplikatif konteks beragam adalah masalah yang memuat minimal dua dari empat tipe masalah multiplikatif berdasarkan taksonomi Vergnaud (2014) yang terdiri dari: 1) *isomorphism of measure/simple proportion*, 2) *product of measurement*, 3) *multiple proportion/double proportion* dan 4) *comparisons of rates and ratios*. Masalah multiplikatif merupakan masalah yang memuat sifat-sifat perkalian (Wright, 2011).

Penalaran proporsional dalam menyelesaikan masalah multiplikatif konteks beragam dikaji berdasarkan teori APOS yang terdiri dari struktur mental *Action*, *Process*, *Object* dan *Schema*. Sedangkan mekanisme mental yang muncul terdiri dari *interiorisasi*, *coordination*, *reversal*, *encapsulation* dan *de-encapsulation*. Tahapan proses penalaran proporsional dalam menyelesaikan masalah multiplikatif konteks

beragam dikaji berdasarkan teori APOS terdiri dari 6 tahapan, yaitu (1) mengidentifikasi, (2) menghubungkan, (3) mengoperasikan, (4) membandingkan, (5) menyimpulkan dan (6) menggeneralisasi.

Tiga tipe penalaran proporsional dalam menyelesaikan masalah multiplikatif konteks beragam berdasarkan tahapan penalaran proporsional seperti yang dipaparkan di Bab IV yaitu (1) penalaran proporsional *Formal Meaning Based Approach* (FMBA), (2) penalaran proporsional *Formal Direct Translation Approach* (FDTA), (3) penalaran proporsional *Informal*. Penalaran proporsional proporsional FMBA merupakan penalaran subjek terkait memahami relasi perubahan suatu kuantitas terhadap kuantitas yang lain melalui hubungan multiplikatif sebagai dasar menyimpulkan ketika memecahkan masalah dengan memunculkan ide menerapkan rumus proporsi serta memaknai dan memberikan alasan di setiap proses pemecahan masalah. Penalaran proporsional FDTA merupakan penalaran subjek terkait memahami relasi perubahan suatu kuantitas terhadap kuantitas yang lain melalui hubungan multiplikatif sebagai dasar menyimpulkan ketika memecahkan masalah. dengan memunculkan ide menerapkan rumus proporsi dengan langsung melakukan perhitungan matematis tanpa memaknai di setiap proses pemecahan masalah. Penalaran proporsional *Informal* merupakan penalaran subjek terkait memahami relasi perubahan suatu kuantitas terhadap kuantitas yang lain melalui hubungan multiplikatif sebagai dasar menyimpulkan ketika memecahkan masalah dengan memunculkan ide menggunakan satuan (*finding the unit*) maupun penjumlahan berulang (*replikasi*). Adapun perbandingan ketiga tipe penalaran proporsional berdasarkan tahapannya, dikaji berdasarkan teori APOS dijelaskan sebagai berikut.

A. Penalaran Proporsional pada Tahap Aksi

Proses penalaran proporsional diawali setiap subjek dari ketiga tipe dengan membaca masalah untuk mengidentifikasi situasi masalah yang disajikan. Dalam proses mengidentifikasi, subjek memilah informasi dari masalah yang mendukung pemahamannya pada situasi masalah. Ketika

mengidentifikasi komponen, subjek pada tipe penalaran proporsional FDTA membaca dan menggarisbawahi informasi pada lembar masalah. Tujuan subjek menggarisbawahi adalah memahami lebih banyak informasi penting dari situasi masalah yang telah dibacanya. Hal ini senada dengan para peneliti (Asay & Schneider, 1976; Kiewra & Fletcher, 1984; Riyadi, dkk., 2015; Prayitno, dkk., 2020b) bahwa melalui tahapan menggarisbawahi dapat membantu siswa memusatkan perhatiannya pada situasi masalah dan memahami informasi penting lebih banyak lagi. Aktivitas menggarisbawahi merupakan salah satu strategi belajar yang membantu siswa memusatkan perhatiannya pada kalimat yang perlu mendapatkan perhatian (Asay & Schneider, 1976; Kiewra & Fletcher, 1984; Ariyadi, Hersulastuti, & Nugrahaningsih, 2015). Aktivitas tersebut membuat siswa memahami lebih banyak informasi penting (Asay & Schneider, 1976; Kiewra & Fletcher, 1984) mengingat aktivitas menggarisbawahi merupakan salah satu strategi mengulang kompleks (*complex rehearsal*). Hasil pemahaman situasi masalah, subjek mengungkapkan situasi masalah dengan bahasanya sendiri.

Ketika mengidentifikasi komponen, subjek pada setiap tipe penalaran proporsional mengungkapkan secara lisan situasi masalah dengan bahasanya sendiri. Hal ini senada dengan penelitian sebelumnya (Anwar & Rahmawati, 2017; Pape, 2004; Polya, 1973; Subanji & Supratman, 2015; Vygotsky, 2005) bahwa ungkapan secara lisan menunjukkan subjek mengembangkan gambaran awal masalah yang telah dibacanya. Pengungkapan secara lisan yang dilakukan subjek menunjukkan proses berfikir dan berbicara dalam memahami situasi masalah. Seperti yang diungkapkan Roth (2013) bahwa tahapan tersebut menunjukkan proses berfikir verbal yaitu berfikir dan berbicara. Subjek yang berada pada tipe penalaran proporsional FMBA dan Informal menuliskan kembali informasi dari masalah dengan bahasanya sendiri. Subjek menuliskan informasi yang diketahui dan ditanyakan dari situasi masalah yang dibacanya. Cara tersebut merupakan tahapan *decoding* yaitu menentukan makna situasi masalah secara tertulis (Deane & Sheehan, 2003).

Subjek yang berada pada tipe penalaran proporsional FMBA tidak hanya mengungkapkan situasi masalah secara lisan tetapi juga memaknai situasi yang diberikan. Pemaknaan tersebut membuat subjek lebih mudah memahami konteks masalah yang disajikan. Hal ini menunjukkan subjek berada pada tipe penalaran proporsional *Meaning based Approach* (Pape, 2004; Subanji, 2012) yaitu melakukan tahapan memaknai konteks masalah sebelum melakukan pemecahan masalah. Tahapan tersebut menunjukkan subjek memandang matematika sebagai proses konstruksi dan memiliki kecenderungan memecahkan masalah lebih baik (Pape, 2004; Subanji, 2012; Watson & Mason, 2005). Dalam aktivitas mengidentifikasi komponen, struktur mental yang muncul adalah *action* (aksi). Hal ini sesuai dengan Dubinsky & McDonald (2001) yang menyatakan bahwa aksi dapat terjadi secara internal melalui control seseorang yang melakukannya. Ketika mengidentifikasi komponen, mekanisme mental yang muncul adalah *interiorization*. Hal ini sesuai dengan pendapat Mudrikah (2016) yang menyatakan bahwa interiorisasi merupakan kegiatan siswa dalam merespon situasi sebagai cara untuk memahami fenomena sesuai dengan persepsi mereka.

Secara umum perbedaan tahapan Aksi dari ketiga tipe penalaran proporsional disajikan pada Tabel 6.1 berikut.

Tabel 6.1 Perbedaan Tahapan Aksi Dari Ketiga Tipe Penalaran Proporsional

Tipe Penalaran Proporsional	Tahapan Aksi
FMBA	<ul style="list-style-type: none"> • Subjek membaca masalah, mengidentifikasi informasi, mengungkapkan secara lisan situasi masalah dengan bahasanya sendiri • Subjek memaknai situasi masalah dan komponen pada masalah. • Subjek menulis apa yang diketahui dan ditanyakan sesuai konteks masalah yang mendukung pemahamannya

Tipe Penalaran Proporsional	Tahapan Aksi
FDTA	<ul style="list-style-type: none"> • Subjek membaca masalah, mengidentifikasi informasi, mengungkapkan secara lisan situasi masalah dengan bahasanya sendiri • menggarisbawahi beberapa kata pada masalah.
Informal	<ul style="list-style-type: none"> • Subjek membaca masalah, mengidentifikasi informasi, mengungkapkan secara lisan situasi masalah dengan bahasanya sendiri • Subjek menuliskan kembali apa yang diketahui dan ditanyakan sesuai konteks masalah yang mendukung pemahamannya

B. Penalaran proporsional pada Tahap Proses

Setelah mengidentifikasi komponen, subjek menghubungkan antar komponen yang terkait dengan komponen yang akan diselesaikan. Subjek pada tipe penalaran proporsional FMBA menghubungkan 11 komponen, yaitu Jumlah bilangan pola kalung dan total manik-manik, Banyaknya manik-manik satuan dengan Banyaknya manik-manik paket, Isi per paket dan banyak manik-manik paket, Harga manik-manik paket dan banyak manik-manik paket, Harga manik-manik paket dan isi per paket, Harga manikmanik satuan dan banyak manik-manik satuan, Pola kalung Sukma dan pola kalung Anandi, Pola kalung dan banyak manik-manik satuan Sukma, Pola kalung Sukma dan Faktor persekutuan, Pola kalung Anandi dan banyak pengulangan pola, Pola kalung dan banyak manik-manik tersedia.

Subjek pada tipe penalaran proporsional FDTA menghubungkan 8 komponen, yaitu pola kalung dan Total manik-manik, banyak manik-manik satuan dan banyak manik-manik paket, banyak manik-manik paket dan harga beli manik-manik paket, harga manik-manik paket (HMMP), isi per paket (IP), dan harga manik-manik satuan (HMMS), banyak manik-manik satuan (BMMS) dan harga manik-manik satuan (HMMS), banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS)

TJMM) yang digunakan Sukma dan Anandi, banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM) Sukma dan Faktor persekutuannya, banyak paket tersedia (BPT) dan banyak manik-manik tersedia (BMMT).

Subjek pada tipe penalaran proporsional Informal menghubungkan 7 komponen, yaitu isi per paket (IP) dan banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM), Harga manik-manik paket (HMMP) dan banyak manik-manik paket tiap jenis manik-manik (BMMP TJMM), Harga manik-manik paket (HMMP) dan Harga manik-manik satuan (HMMS), Pola kalung (PK), banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM) dan total manik-manik (TMM), pola kalung (PK) dan banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM), banyak manik-manik tersedia (BMMT) paket dan satuan, harga manik-manik satuan (HMMS) dan banyak manik-manik satuan (BMMS).

Perbedaan banyaknya koneksi kata menunjukkan pemahaman subjek pada masalah yang dibacanya (Ge & Land, 2004; Prayitno, dkk., 2020a, 2020b). Subjek pada tipe FMBA telah membuat lebih banyak koneksi dari pada subjek pada tipe FDTA dan subjek pada tipe penalaran proporsional Informal. Hal ini senada dengan penelitian sebelumnya (Kilpatrick et Al., 2001; Chris, 2016) mengungkapkan pemahaman konseptual itu ditunjukkan melalui kapasitas untuk merepresentasikan situasi matematika dengan cara yang berbeda dan terkait dengan kekayaan koneksi yang dibuat. Koneksi yang telah dibuat oleh subjek selanjutnya dimaknai sesuai situasi masalah untuk membuat maknanya menjadi lebih jelas. Pemaknaan kata didasarkan pada konsepsi Halliday tentang tata bahasa yang memberikan pilihan pada subjek untuk menulis dan mengungkapkan maknanya sesuai dengan situasi masalah (Dimmel & Herbst, 2015; Halliday & Matthiessen, 2004; O'Halloran, 2005). Hasilnya dijadikan sebagai dasar untuk menerjemahkan ke dalam ekspresi matematika untuk memberikan solusi dari masalah membuat koneksi.

Struktur mental yang muncul pada aktivitas ini adalah **Proses**, sedangkan mekanisme mental yang muncul adalah koordinasi dan reversal. Menurut Dubinsky, dkk (2005) koordinasi merupakan mekanisme mental dalam mengkoordinasi aksi yang sudah diinteriorisasi. Koordinasi digunakan untuk mengonstruksi proses baru. Dua atau lebih proses dapat dikoordinasi untuk membentuk proses baru. Reversal merupakan kegiatan merunut kembali pengetahuan yang sudah dimiliki sebelumnya untuk mengonstruksi konsep baru.

Setelah subjek menghubungkan antar komponen, selanjutnya subjek mengoperasikan komponen yang telah dihubungkan tersebut berdasarkan strategi yang dimiliki untuk memperoleh solusi dari masalah. Hal ini senada dengan Kontogianni, dkk (2019) bahwa sebagian besar siswa dapat menyelesaikan tugas proporsi dengan benar karena mereka dapat membuat hubungan antara kuantitas dan kemudian mengoperasikannya. Sedangkan operasi yang dilakukan adalah perkalian, penjumlahan dan pembagian. Hal ini senada dengan penelitian sebelumnya (Siemon, Breed dkk 2006 ; Johnson dkk, 2017) yang menyatakan bahwa berpikir multiplikatif adalah kemampuan untuk mengenali dan memecahkan suatu masalah yang melibatkan perkalian dan / atau pembagian termasuk proporsi langsung dan proporsi tidak langsung.

Subjek tipe penalaran proporsional FMBA maupun FDTA ketika mengoperasikan komponen untuk menentukan kuantitas yang belum diketahui menggunakan rumus proporsi. Namun terdapat perbedaan yaitu subjek tipe penalaran proporsional FMBA mengoperasikan komponen dengan menerapkan rumus proporsi serta memaknai dan memberikan alasan di setiap proses pemecahan masalah. Subjek pada tipe penalaran proporsional FMBA mengoperasikan antar komponen, yaitu: mengalikan bilangan pola kalung dengan total manik-manik dengan menerapkan rumus proporsi **rumus proporsi** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, (**a,b,c,d** $\neq 0$), mengalikan isi per paket dengan banyaknya manik-manik paket, mengalikan harga manik-manik paket dan banyak manik-manik paket, membagi harga manik-manik paket dengan isi per paket (IP) dan

menambahkan 10%, mengalikan harga manik-manik satuan (HMMS) dengan banyak manik-manik satuan (BMMS), membagi banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM) dengan Faktor Persekutuan secara terus menerus sebanyak 4 kali sehingga didapat 3 pola kalung beda, mengalikan bilangan pola kalung dengan banyak pengulangan pola (BPP), mengalikan banyak paket tersedia (BPT) dengan isi per paket (IP), menjumlahkan bilangan pola kalung (PK) dan membagi total manik-manik (TMM) tersedia dengan Jumlah pola kalung (PK), Perkalian pola kalung (PK) dengan total manik-manik (TMM) tersedia menggunakan rumus proporsi.

Subjek pada tipe proporsional FDTA ketika melakukan operasi, menerapkan rumus proporsi dengan langsung melakukan perhitungan matematis tanpa memaknai di setiap proses pemecahan masalah Hal ini sesuai dengan penelitian sebelumnya (Pape, 2004; Subanji, 2012; Watson & Mason, 2005) yang menyatakan bahwa karakteristik perilaku pemecah masalah tipe DTA bekerja langsung ke operasi matematika. Subjek pada tipe ini, menunjukkan berada pada perkembangan kognitif operasional formal (Lefa, 2014; Piaget, 1983). Artinya, subjek mampu berfikir abstrak dan logis yang dijadikan dasar dalam mengambil keputusan maupun mengembangkan hipotesis.

Subjek tipe penalaran proporsional Informal mengoperasikan komponen untuk menentukan kuantitas yang belum diketahui menemukan dan menggunakan satuan (*finding the unit*) maupun penjumlahan berulang (*replikasi*). Hal ini senada dengan penelitian sebelumnya (Johar, 2016; Martinez, 2015; Langrall & Swafford, 2000) yang mengatakan bahwa siswa dalam penalaran proporsional pada level Informal menemukan dan menggunakan nilai satuan. Kemudian Lamon (2012) menyatakan *Replication strategy* merupakan strategi intuitif yang digunakan secara spontan dalam menyelesaikan banyak masalah proporsi. Adanya perbedaan cara mengoperasikan komponen yang digunakan subjek menunjukkan bahwa fokus pembelajaran tidak terletak pada prosedur tertentu yang digunakan untuk memecahkan masalah. Akan tetapi, harus menjelaskan prosedur mana yang dipilih untuk

memecahkan masalah, bagaimana memecahkan masalah menggunakan prosedur tersebut, dan memaknai prosedur yang dilakukannya (Lee, dkk., 2011; Wu & Adam, 2006). Hal ini senada dengan Carney, dkk (2015) yang mengatakan bahwa strategi pemecahan masalah penalaran proporsional yang berbeda terwujud dari kognisi siswa sendiri. Untuk itu, penting bagi siswa untuk memahami setiap prosedur pemecahan masalah yang dilakukan (Graeber, 1999), menurunkan prosedur dari konteks masalah, dan menghubungkan konteks yang saling terkait ketika memecahkan masalah (Pape, 2004; Subanji, 2012).

Struktur mental yang muncul pada aktivitas ini adalah Proses, sedangkan mekanisme mental yang muncul adalah koordinasi dan reversal. Menurut Dubinsky, dkk (2005) koordinasi merupakan mekanisme mental dalam mengkoordinasi aksi yang sudah diinteriorisasi. Koordinasi digunakan untuk mengonstruksi proses baru. Dua atau lebih proses dapat dikoordinasi untuk membentuk proses baru. Reversal merupakan kegiatan merunut kembali pengetahuan yang sudah dimiliki sebelumnya untuk mengonstruksi konsep baru.

Bagian dari tahap proses yang terakhir yaitu membandingkan antar komponen hasil operasi. Subjek pada setiap tipe selalu membandingkan antar komponen yang terkait maupun yang telah dioperasikan. Hal ini senada dengan Kontogianni, dkk (2019) yang menyatakan penalar proporsional mampu membandingkan rasio dan kuantitas. Struktur mental yang muncul pada aktivitas ini adalah proses, sedangkan mekanisme mental yang muncul adalah koordinasi dan reversal. Menurut Dubinsky, dkk (2005) koordinasi merupakan mekanisme mental dalam mengkoordinasi aksi yang sudah diinteriorisasi. Koordinasi digunakan untuk mengonstruksi proses baru. Dua atau lebih proses dapat dikoordinasi untuk membentuk proses baru. Reversal merupakan kegiatan merunut kembali pengetahuan yang sudah dimiliki sebelumnya untuk mengonstruksi konsep baru. Secara umum perbedaan tahapan proses dari ketiga tipe penalaran proporsional disajikan pada Tabel 6.2 berikut.

Tabel 6.2 Perbedaan Tahapan Proses dari Ketiga Tipe Penalaran Proporsional

Tipe Penalaran Proporsional	Tahap Proses		
	Menghubungkan	Mengoperasikan	Membandingkan
FMBA	<ol style="list-style-type: none"> 1. Jumlah bilangan pola kalung dan total manik-manik 2. Banyaknya manik-manik satuan dengan banyaknya manik-manik paket 3. Isi per paket dan banyak manik-manik paket 4. Harga manik-manik paket dan banyak manik-manik paket. 5. Harga manik-manik paket dan isi per paket 6. Harga manik-manik satuan dan banyak manik-manik satuan. 7. Pola kalung Sukma dan pola kalung Anandi 8. Pola kalung dan banyak manik-manik satuan Sukma. 	<ol style="list-style-type: none"> 1. mengalikan bilangan pola kalung dengan total manik-manik menggunakan rumus proporsi $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, (a,b,c,d ≠ 0), 2. Mengalikan isi per paket dengan banyaknya manik-manik paket, 3. Mengalikan harga manik-manik paket dan banyak manik-manik paket, 4. membagi harga manik-manik paket dengan isi per paket dan menambahkan 10%, 5. mengalikan harga manik-manik satuan dengan banyak manik-manik satuan (BMMS), 	<ol style="list-style-type: none"> 1. banyak manik-manik paket tiap jenis 2. harga beli manik-manik paket tiap jenis 3. harga manik-manik satuan tiap jenis 4. harga beli manik-manik satuan tiap jenis 5. harga beli manik-manik paket dan harga beli manik-manik satuan 6. banyak manik-manik satuan tiap jenis dari pola kalung yang ditemukan 7. harga manik-manik paket dan banyak manik-manik paket 8. harga manik-manik satuan dan banyak manik-manik satuan

Type Penalaran Proporsional	Tahap Proses		
	Menghubungkan	Mengoperasikan	Membandingkan
<p>9. Pola kalung Sukma dan Faktor persekutuan</p> <p>10. Pola kalung Anandi dan banyak pengulangan pola</p> <p>11. Pola kalung dan banyak manik-manik tersedia</p>	<p>6. membagi banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM) dengan Faktor Persekutuan secara terus menerus sebanyak 4 kali sehingga didapat 3 pola kalung beda,</p> <p>7. mengalikan bilangan pola kalung dengan banyak pengulangan pola (BPP),</p> <p>8. mengalikan banyak paket tersedia (BPT) dengan isi per paket (IP),</p> <p>9. menjumlahkan bilangan pola kalung (PK) dan membagi total manik-manik (TMM) tersedia dengan Jumlah pola kalung (PK),</p> <p>10. Mengalikan pola kalung dengan total manik-manik tersedia menggunakan rumus proporsi.</p>		

Tipe Penalaran Proporsional	Tahap Proses		
	Menghubungkan	Mengoperasikan	Membandingkan
FDTA	<ol style="list-style-type: none"> 1. pola kalung dan Total manik-manik, 2. banyak manik-manik satuan dan banyak manik-manik paket, 3. banyak manik-manik paket (BMMP) dan harga beli manik-manik paket (HBMMP), 4. harga manik-manik paket (HMMP), isi per paket (IP), dan harga manik-manik satuan (HMMS), 5. banyak manik-manik satuan (BMMS) dan harga manik-manik satuan (HMMS), 6. banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM) yang digunakan Sukma dan Anandi, 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Mengalikan bilangan pola kalung dengan total manik-manik menggunakan rumus proporsi rumus $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ($a, b, c, d \neq 0$), 2. Mengalikan banyak manik-manik paket dan harga manik-manik paket tiap jenis 3. Mengalikan 10% dan harga manik-manik pake, hasilnya ditambahkan dengan hmmp, kemudian dibagi dengan ip 10% 4. Mengalikan harga manik-manik satuan dengan banyak manik-manik satuan tiap jenis 5. Mengalikan banyak manik-manik satuan tiap jenis yang digunakan sukma dengan bil 9 sehingga didapat 1 pola kalung 6. Membagi banyak manik-manik tersediadengan bilangan pola kalung 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Banyak manik-manik satuan tiap jenis 2. Banyak manik-manik paket tiap jenis 3. Harga beli manik-manik paket tiap jenis 4. Harga beli manik-manik satuan t tiap jenis 5. Harga beli manik-manik paket dan Harga beli manik-manik satuan t tiap jenis 6. Banyak paket tersedia dengan banyak manik-manik tersedia tiap jenis

Tipe Penalaran Proporsional	Tahap Proses		
	Menghubungkan	Mengoperasikan	Membandingkan
	<p>7. banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM) Sukma dan Faktor persekutuannya</p> <p>8. banyak paket tersedia (BPT) dan banyak manik-manik tersedia (BMMT).</p>		
Informal	<p>1. Isi per paket (IP) dan banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik</p> <p>2. Harga manik-manik paket (HMMP) dan banyak manik-manik paket tiap jenis manik-manik</p> <p>3. Harga manik-manik paket (HMMP) dan Harga manik-manik satuan (HIMMS),</p>	<p>1. Menjumlahkan berulang tiap jenis manik-manik pada pembelian ke-1, ke-2, dan ke-3</p> <p>2. Mengalikan harga manik-manik paket dan banyak manik-manik paket tiap jenis</p> <p>3. Membagi harga manik-manik paket dan isi per paket, kemudian menjumlahkan dengan 10% nya</p> <p>4. Mengalikan harga manik-manik satuan dan banyak manik-manik satuan</p>	<p>1. Banyak manik-manik satuan tiap jenis</p> <p>2. Banyak manik-manik paket tiap jenis</p> <p>3. Harga beli manik-manik paket tiap jenis</p> <p>4. Harga manik-manik satuan tiap jenis</p> <p>5. Harga beli manik-manik satuan t tiap jenis</p>

Tipe Penalaran Proporsional	Tahap Proses		
	Menghubungkan	Mengoperasikan	Membandingkan
4. Pola kalung (PK), banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM) dan total manik-manik (TMM), 5. Pola kalung (PK) dan banyak manik-manik satuan tiap jenis manik-manik (BMMS TJMM), 6. Banyak manik-manik tersedia (BMMT) paket dan satuan, 7. Harga manik-manik satuan (HMMS) dan banyak manik-manik satuan (BMMS).	5. Membagi banyak manik-manik satuan tiap jenis kalung sukma dengan bilangan 3 sehingga didapat 1 pola kalung 6. Mengalikan banyak manik-manik paket tersedia bmmpt dengan isi per paket. 7. Membagi banyak manik-manik satuan tiap jenis dengan pola kalung 8. Harga manik-manik satuan dengan banyak manik-manik satuan tiap jenis	6. Harga beli manik-manik paket dan Harga beli manik-manik satuan t tiap jenis 7. Banyak manik-manik satuan tiap jenis dari pola yang ditemukan 8. Banyak manik-manik satuan tersedia tiap jenis	

C. Penalaran Proporsional pada Tahap Objek

Tahapan menyimpulkan ini dimulai subjek dengan mengurutkan dan menyimpulkan hasil jawaban akhir dari pertanyaan yang pertama sampai pertanyaan yang ke lima. Kemudian subjek menuliskan hasil jawaban akhir berdasarkan caranya masing-masing. Senada dengan penelitian sebelumnya bahwa proses akhir dari pemecahan masalah adalah memberikan kesimpulan yang merupakan jawaban dari masalah (Mao & Sen, 2018; Mejía-ramos, dkk., 2015). Kesimpulan tersebut diberikan subjek untuk menjawab masalah yang diberikan. Jawaban akhir antar subjek tentunya tidak semua sama seperti subjek pada tipe penalaran proporsional formal. Subjek proporsional formal MBA dalam membuat pola kalung Anandi dapat menemukan pola kalung yang maksimal yaitu sebanyak 3 pola kalung, sedangkan subjek proporsional FDTA maupun subjek proporsional Informal hanya menemukan satu pola kalung. Perbedaan jawaban akhir yang diberikan subjek tentunya dipengaruhi oleh pemahaman subjek terhadap konteks masalah yang diberikan. (Wahyuni dkk., 2019, Prayitno dkk., 2020b; Redish & Gupta, 2009; Spiegelhalter dkk., 2011). Pertimbangan tersebut berintegrasi dengan keputusan yang diambil subjek dengan mempertimbangkan “kemungkinan” dan “dampaknya” (Till, 2014). Subjek mempertimbangkan kemungkinan bergantung pada kriteria yang ditetapkan masing-masing subjek. Kriteria subjektif tersebut dipengaruhi dipengaruhi oleh pengalaman dan konsep pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya (Spiegelhalter dkk., 2011; Leinhardt dkk., 1990; Murtafiah dkk., 2018; Redish & Gupta, 2009).

Struktur mental yang muncul pada aktivitas ini adalah Objek, sedangkan mekanisme mental yang muncul adalah enkapsulasi dan de-enkapsulasi. Menurut Dubinsky (2001) individu dikatakan sudah melakukan enkapsulasi struktur mental proses menjadi objek jika ia sudah menyadari proses sebagai sebuah totalitas, menyadari aksi dapat dilakukan terhadap proses tersebut. Arnon, dkk. (2014) menjelaskan bahwa tidak hanya satu objek dapat di de-enkapsulasi, tetapi

dua objek dapat de-enkapsulasi menjadi proses-proses pembentuknya. Dua proses tersebut dikoordinasikan dan dien kapsulasi kembali menjadi sebuah objek baru.

Secara umum perbedaan tahapan Objek dari ketiga tipe penalaran proporsional disajikan pada Tabel 6.3 berikut.

Tabel 6.3. Perbedaan Tahapan Objek dari Ketiga Tipe Penalaran Proporsional

Tipe Penalaran proporsional	Tahap Objek
FMBA	<ul style="list-style-type: none"> • Subjek mengurutkan, menyimpulkan dan menulis hasil jawaban akhir • untuk pertanyaan nomor 3 subjek menemukan 3 jawaban
FDTA	<ul style="list-style-type: none"> • Subjek mengurutkan, menyimpulkan dan menulis hasil jawaban akhir • untuk pertanyaan nomor 3, subjek menemukan 1 jawaban
Informal	<ul style="list-style-type: none"> • Subjek mengurutkan, menyimpulkan dan menulis hasil jawaban akhir • Untuk pertanyaan nomor 3, subjek menemukan 1 jawaban

D. Penalaran Proporsional pada Tahap Skema

Tahap terakhir dalam penalaran proporsional adalah skema. Dalam tahap ini subjek pada setiap tipe mereview hasil jawaban akhir untuk melakukan generalisasi dengan merumuskan hubungan antar variasi kuantitas. Hal ini sesuai dengan pendapat Carlson, dkk. (2004); Blanton & Kaput (2011); Tanis (2011); Subanji (2011); Subanji, dkk. (2015), Yuniati, dkk. (2020) yang menyatakan bahwa hubungan kovariasional adalah aktivitas mental dalam mengkoordinasikan dua kuantitas (variabel bebas dan variabel terikat) yang berkaitan dengan perubahan nilai dari satu kuantitas terhadap kuantitas yang lain.

Pada saat melakukan generalisasi, subjek pada tipe penalaran proporsional FMBA dan FDTA merumuskan hubungan antar variasi kuantitas dengan mereview hasil jawaban pertanyaan pertama dan kedua kemudian menulis persamaan yang menghubungkan variasi kuantitas tersebut. Sedangkan subjek pada tipe penalaran proporsional Informal menggeneralisasikan hubungan antar variasi kuantitas melalui pembuatan tabel yang menghubungkan kedua variasi kuantitas, kemudian menulis persamaan yang menghubungkan keduanya. Hal ini sesuai dengan pendapat Blanton, dkk (2015) dan John (2017) yang menyatakan bahwa cara yang digunakan dalam mengorganisasikan data digambarkan dalam tabel. Struktur mental yang muncul pada aktivitas ini adalah Skema dan mekanisme mental yang muncul adalah tematisasi. Skema adalah kumpulan dari struktur mental aksi, proses, objek dan skema lainnya serta yang digabungkan sehingga membentuk totalitas mahasiswa dalam memahami suatu konsep yang sedang dipelajari (Dubinsky & McDonald, 2008; Dubinsky, 2001)

Secara umum perbedaan tahapan Skema dari ketiga tipe penalaran proporsional disajikan pada Tabel 6.4 berikut.

Tabel .4. Perbedaan Tahapan Skema dari Ketiga Tipe Penalaran Proporsional

Tipe Penalaran proporsional	Tahap Skema
FMBA	<ul style="list-style-type: none"> • mereview hasil jawaban pertama dan kedua • merumuskan hubungan antar variasi kuantitas • menulis persamaan yang menghubungkan variasi kuantitas tersebut
FDTA	<ul style="list-style-type: none"> • mereview hasil jawaban pertama dan kedua • merumuskan hubungan antar variasi kuantitas • menulis persamaan yang menghubungkan variasi kuantitas tersebut

Tipe Penalaran proporsional	Tahap Skema
Informal	<ul style="list-style-type: none"> • membuat tabel yang menghubungkan antar variasi kuantitas • merumuskan hubungan antar variasi kuantitas • menulis persamaan yang menghubungkan variasi kuantitas tersebut.

DAFTAR RUJUKAN

- Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 91-125). New York, NY: Academic Press
- Berk, D., Taber, S. B., Gorowara, C. C., & Poetzl, C. (2009). Developing prospective elementary teachers' flexibility in the domain of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(3), 113-135.
- Blum, W. & Niss, M. 1991. Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to the other Subjects State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF00302716>
- Brown, R., & Hirst, E. (2007). Developing an understanding of the mediating role of talk in the elementary mathematics classroom. *The Journal of Classroom Interaction*, 18-28.
- Chaim, D.B., Kerret, Y., Ilany, B., S. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 333-340.
- Chaim, D.B., Kerret, Y., Ilany, B., S. (2012). Ratio and Proportion. Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre- and

In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes). *Sense Pubisher*.

- Cramer, K. A., Post, T. R. & Currier, S. (1993). Learning and teaching ratio and proportion: Research implications. In D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom* (pp. 159–178). New York: MacMillen Publishing Company.
- Dahar, R. W. (2011). Teori-teori belajar dan pembelajaran. *Jakarta: Erlangga*, 136, 141.
- Dole, S., Clarke, D., Wright, T., Hilton, G., & Roche, A. (2008, June). Eliciting growth in teachers' proportional reasoning: Measuring the impact of a professional development program. In *Navigating currents and charting directions: Proceedings of the 31st annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 163-170).
- Dole, S. (2010). Making connections to the big ideas in mathematic: Promoting proportional reasoning.
- Dole, S., Clarke, D., Wright, T., & Hilton, G. (2012). Students' proportional reasoning in mathematics and science. In *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 195-202). International Group for the Psychology of Mathematics
- .Izsák, A., & Jacobson, E. (2017). Preservice teachers' reasoning about relationships that are and are not proportional: Aknowledge-in-pieces account. *Journal for Research in Mathematics Education*, 48(3), 300–339. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.48.3.0300>
- Jeong, Y., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2007). The development of proportional reasoning: Effect of continuous versus discrete quantities. *Journal of Cognition and Development*, 8(2), 237-256.

- Johar, R. 2006. *Pengembangan level Penalaran Proporsional Siswa SMP*. Disertasi. Program Pascasarjana, Universitas Negeri Surabaya. Tidak diterbitkan.
- Johnson, K. (2017). A Study of Pre-Service Teachers Use of Representations in Their Proportional Reasoning. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Kantowski, M. G. 1977. Processes Involved in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8(3), 163-180. <https://www.jstor.org/stable/748518>
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teacher*. Boston: Allyn & Bacon
- Krulik, S., Rudnick, J. A., & Milou, E. (2003). *Teaching mathematics in middle school: A practical guide*. Allyn and Bacon.
- Lamon, S. J. (1999). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding*. New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (Vol. 1, pp. 629–667). Charlotte, NC: Information Age.
- Lamon, S. J. (2008). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd edition). London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3rd ed.). New York, NY: Routledge.
- Langrall, C. W., & Swafford, J. (2000). Three balloons for two dollars: Developing proportional reasoning. *Mathematics teaching in the middle school*, 6(4), 254.

- Litner, J. (2008). A Research Frame Work For Creative and Imitatif Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 6(70), 255-276.
- Martin, D. B. (2009). Researching race in mathematics education. *Teachers College Record*, 111(2), 295-338.
- Martínez Ortiz, A. (2015). Examining Students' Proportional Reasoning Strategy Levels as Evidence of the Impact of an Integrated LEGO Robotics and Mathematics Learning Experience. *Journal of Technology Education*, 26(2), 46-69.
- Norton, A., & Deater-Deckard, K. (2014). Mathematics in mind, brain, and education: A neo-Piagetian approach. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(3), 647-667.
- Pape, S. J. (2004). Middle School Children's Problem-Solving Behavior: A Cognitive Analysis from a Reading Comprehension Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35(3), 187-219.
- Paul, R. (2005). The state of critical thinking today. *New directions for community colleges*, 2005(130), 27-38.
- Piaget, J. (1983). *Handbook of Child Psychology 4th Edition*. (P. Mussen, Ed.) (4th ed., Vol. 1). New York: Wiley.
- Roussel, J. L., Fayol, M., & Barrouillet, P. (2002). Procedural vs. direct retrieval strategies in arithmetic: A comparison between additive and multiplicative problem solving. *European Journal of Cognitive Psychology*, 14(1), 61-104.
- Saleh, K., Yuwono, I., As'ari, A. R., & Sa'dijah, C. (2017). Errors analysis solving problems analogies by Newman procedure using analogical reasoning. *International Journal of Humanities and Social Sciences*, 9(1), 17-26.
- Shield, M., & Dole, S. (2008). Proportion in middle school mathematics: It's everywhere. *Australian Mathematics Teacher*, The, 64(3), 10-15.
- Subanji. (2011). *Teori Berfikir Pseudo Penalaran Kovariasional*. Malang: UM Press.

- Subanji. (2012). Pengembangan Tahapan Matematik Problem Solving Mengacu pada Meaning Based Approach. *J-TEQIP*, 3(2), 1–8.
- Subanji, Rajiden, Supratman & Maedi, A. (2015). The Pseudo-Covariational Reasoning Thought Processes in Constructing Graph Function of Reversible Event Dynamics Based on Assimilation and Accommodation Frameworks. *Journal Korean Society of Mathematical Education*. 19 (1). 61-79
- Van de Walle, J.A. (2008). Pengembangan Pengajaran Matematika Sekolah Dasar dan Menengah edisi ke-6 jilid 2 (developing primary and high school teaching of mathematics, 6th edition, 2nd volume. Translated by Dr. Suyono, M.Si. Jakarta: Erlangga
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57–86.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' overuse of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(3), 311–342
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: What and why?. *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*.
- Wright, V. J. (2011). *The development of multiplicative thinking and proportional reasoning: Models of conceptual learning and transfer*. (Doctoral dissertation). University of Waikato, Waikato.

TENTANG PENULIS



Indah wahyuni dilahirkan di Jember pada tanggal 06 Maret 1980, anak kelima dari lima bersaudara pasangan H. Subarlan (Alm) dan Hj. Markamah. Pendidikan Sekolah Dasar dan Menengah ditempuh penulis di SD NU 05 Ampel Wuluhan Jember (lulus tahun 1992), SMP Negeri 1 Ampel Wuluhan Jember (lulus tahun 1995), dan SMK 1 Diponegoro Wuluhan Jurusan Akuntansi (lulus tahun 1998). Setelah

lulus SMK, melanjutkan S1 Pendidikan Matematika di IKIP PGRI Jember (lulus tahun 2002). dan melanjutkan S2 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang (lulus tahun 2008). Pada tahun 2004 penulis menikah dengan Suyarso Ingsat Sukariyadi dan dikarunia 4 orang anak, yaitu Duqoq Fadilah Akbar (anak pertama) lahir 8 Pebruari 2008, Sukma Nirmalasari (anak ke dua) lahir 16 Agustus 2010, Ahmad Ragil Shidiq (Anak ke tiga) lahir 30 Desember 2013 dan Nisa Anandya Pinatih (Anak ke empat) lahir 19 April 2016.

Setelah menamatkan Magister, pada tahun 2010 penulis diangkat sebagai Dosen Tetap PNS di IAIN Jember yang pada tahun 2021 ini telah bertransformasi menjadi UIN KHAS Jember. Pada tahun 2015, Penulis diangkat sebagai ketua program studi Tadris Matematika Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan IAIN Jember. Pada tahun 2021 Penulis lulus S3 Pendidikan Matematika di Universitas Negeri Malang dengan beasiswa Diktis Kemenag Mora Scholarship Program 5000 Doktor. Pada Tahun 2022 hingga sekarang penulis mendapat tugas Tambahan sebagai Ketua Jurusan Pendidikan Sains di Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan UIN Kiai Haji Achmad Siddiq Jember.

PENALARAN PROPORSIONAL

Kemampuan penalaran proporsional adalah kemampuan yang penting dimiliki oleh siswa dalam pembelajaran matematika. Penalaran proporsional merupakan suatu kemampuan berpikir yang sangat penting dimiliki oleh seorang siswa dalam pembelajaran matematika. Dengan kemampuan penalaran proporsional, dapat membantu siswa dalam menyelesaikan soal maupun masalah yang dihadapi dalam kehidupan sehari-hari. Oleh karena itu hadirnya buku yang berjudul "Penalaran Proporsional" telah mengungkap proses berpikir dalam matematika yang mempunyai karakteristik pola berfikir yang logis bersifat analitis. Penalaran proporsional siswa tidak hanya aktifitas berpikir dalam menarik kesimpulan, tetapi dibutuhkan pemahaman analitis dan kemampuan pemecahan masalah yang tinggi dengan menggunakan strategi penjumlahan, perkalian dalam mencapai pengoperasian soal aritmatika sosial.



📍 Jl. Garuda Gg. Panji 1, Kepanjen
Jaranan, Bergantapan, Bantul
📞 cetabukuluadangkata
✉ cetabukuluadangkata@gmail.com
🌐 www.cetabukuluadangkata.id

ISBN: 978-623-136-007-4



9 786231 136007 4